*** TÁVOKTATÁS 2002. MÁJUS 11. ***

1. Egy paralelogramma három csúcsa: $A(-2,-5,4), B(-2,3,5)$ és $C(4,-2,2)$. (A és C szemközti csúcsok.)
   (a) Határozza meg a középpont és a D csúcs koordinátáit!
   (b) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletrendszerét!
   (c) Írja fel a paralelogramma síkjának egyenletét!
   (d) Határozza meg a paralelogramma B csúcsnál lévő szögét!

2. Oldja meg a $z^6 + 8\sqrt{2}z^3 + 64 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

3. Határozza meg az $f(x) = \ln^2 x$ függvény inflexiós pontjának koordinátáit!

4. $\displaystyle\int (3x-2)\sin 2x + \frac{\sin 2x}{\cos 2x - 5} + \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x - 5}}\; dx$

5. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az alábbi kétváltozós függvénynek!
   $f(x,y) = 2x^3 - 30xy - 6x - 15y^2 - 30y + 7$

6. Oldja meg az $y'' + 3y' - 4y = 5\sin 3x + 35\cos 3x$ differenciálegyenletet!

7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rrrcr} 7x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & +16 \\ 8x_1 & +3x_2 & -7x_3 & = & +9 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & +4 \end{array}$$

*** MEGOLDÓKULCS - 2002. MÁJUS 11. ***

1. (a) K felezi a(z) $\overline{AC}$ szakaszt: $\begin{cases} k_1 = \dfrac{a_1+c_1}{2} = 1 \\ k_2 = \dfrac{a_2+c_2}{2} = -\dfrac{7}{2} \\ k_3 = \dfrac{a_3+c_3}{2} = 3 \end{cases} \Longrightarrow K(1, -\dfrac{7}{2}, 3)$

   K felezi a(z) $\overline{BD}$ szakaszt: $\begin{cases} k_1 = \dfrac{b_1+d_1}{2} \Rightarrow d_1 = 2k_1 - a_1 = 4 \\ k_2 = \dfrac{b_2+d_2}{2} \Rightarrow d_2 = 2k_2 - a_2 = -10 \\ k_3 = \dfrac{b_3+d_3}{2} \Rightarrow d_3 = 2k_3 - a_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow D(4, -10, 1)$

   (b) $\underline{v} = \overrightarrow{AB}(0, 8, 1)$ és $P_0 = A$

   $e : x = -2, \dfrac{y+5}{8} = \dfrac{z-4}{1}$ vagy $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 + 8t \\ z = +4 + t \end{cases}$, ahol t $\in \mathbb{R}$

   (c) $\underline{n} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -19\underline{i} + 6\underline{j} - 48\underline{k} \Longrightarrow \underline{n}(-19, 6, -48)$

   S_{ABC}: $-19(x+2) + 6(y+5) - 48(z-4) = 0 \Longrightarrow -19x + 6y - 48z = -184$

   (d) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{(0 \cdot 6) + ((-8) \cdot (-5)) + ((-1) \cdot (-3))}{\sqrt{0^2 + (-8)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-5)^2 + (-3)^2}}$

   $\cos\alpha \approx 0,6375 \Longrightarrow \alpha \approx 50,4^\circ$

2. $z^6 + 8\sqrt{2}z^3 + 64 = 0 \Longrightarrow a = z^3 \Longrightarrow a^2 + 8\sqrt{2}a + 64 = 0$

   $$a_{1,2} = \frac{-8\sqrt{2} \pm \sqrt{-128}}{2} = \frac{-8\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}i}{2} = -4\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}i = \begin{cases} 8(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) \\ 8(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) \end{cases}$$

   $$\begin{cases} z_{1,2,3} = \sqrt[3]{8}\underbrace{\left(\cos\dfrac{135^\circ + k360^\circ}{3} + i\sin\dfrac{135^\circ + k360^\circ}{3}\right)}_{k=0,1,2} = \begin{cases} z_1 = 2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) \\ z_2 = 2(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ) \\ z_3 = 2(\cos 285^\circ + i\sin 285^\circ) \end{cases} \\ \text{és} \\ z_{4,5,6} = \sqrt[3]{8}\underbrace{\left(\cos\dfrac{225^\circ + k360^\circ}{3} + i\sin\dfrac{225^\circ + k360^\circ}{3}\right)}_{k=0,1,2} = \begin{cases} z_4 = 2(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ) \\ z_5 = 2(\cos 195^\circ + i\sin 195^\circ) \\ z_6 = 2(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ) \end{cases} \end{cases}$$

3. $f(x) = \ln^2 x \Longrightarrow D_f = \mathbb{R}^+$

   $f'(x) = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$

$$f''(x) = \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x\right) - (2\ln x \cdot 1)}{x^2}$$

Inflexiós pont meghatározásakor keresendő az $f''(x)$ zérushelye(i):
$2 - \ln x = 0$
$x = e \Longrightarrow f(x) = \ln^2 x = \ln^2 e = 1 \Longrightarrow P_{inf.}(e, 1)$

D_f	$0 < x < e$	$x = e$	$e < x$
f"	$+$	0	$-$
f	KONVEX	INFL. PONT	KONKÁV

4. $$\int \underbrace{(3x-2)\sin 2x}_{f \cdot g'} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x - 5} + \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x - 5}}\, dx = (3x-2)\frac{-2\cos 2x}{2} - \int 3 \cdot \frac{-2\cos 2x}{2} +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x - 5}}_{\frac{f'}{f}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{[\cos 2x - 5]^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2\sin 2x)}_{f^n \cdot f'}\, dx = (3x-2)\frac{-\cos 2x}{2} + \frac{3}{4}\sin 2x -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x - 5| - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\cos 2x - 5}}{\frac{1}{2}} + c$$

5. $f(x, y) = 2x^3 - 30xy - 6x - 15y^2 - 30y + 7$

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 30y - 6 = 0 \\ f'_y = -30x - 30y - 30 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - 5y - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 - 5(-x-1) - 1 = x^2 + 5x + 4 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \overbrace{\sqrt{25 - 16}}^{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_1(-1, 0) \\ P_2(-4, +3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xx} = 12x \\ f''_{yy} = -30 \\ f''_{xy} = -30 \end{cases}$$

$\left[(f''_{xx} \cdot f''_{yy}) - (f''_{xy})^2\right]|_{P_1} = (-12)(-30) - (-30)^2 = -540 < 0 \Rightarrow P_1$-ben nincs szélsőérték.
$\left[(f''_{xx} \cdot f''_{yy}) - (f''_{xy})^2\right]|_{P_2} = (-48)(-30) - (-30)^2 = +540 > 0 \Rightarrow P_2$-ben van szélsőérték.
$\Longrightarrow$ Mivel $f''_{xx}|_{P_2} = -48 < 0$,ezért $P_2(-4, +3)$-ben a függvénynek MAXIMUMA van.

6. $y'' + 3y' - 4y = 5\sin 3x + 35\cos 3x$

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \overbrace{\sqrt{9 + 16}}^{25}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = +1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow Y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$$

$$\begin{cases} y_p = A\sin 3x + B\cos 3x \\ y'_p = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x \\ y''_p = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x \end{cases}$$

$$-9A\sin 3x - 9B\cos 3x + 3(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) - 4(A\sin 3x + B\cos 3x) = 5\sin 3x + 35\cos 3x$$

$$\begin{cases} -13A - 9B = 5 \\ -13B + 9A = 35 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = +1 \\ B = -2 \end{cases} \Longrightarrow y'_p = \sin 3x - 2\cos 3x$$

$$y = Y + y'_p = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} + \sin 3x - 2\cos 3x$$

7. feladat megoldása:

	a_1	a_2	a_3	b		a_1	a_3	b		a_3	b	
e_1	$+7$	$(+1)$	$+2$	$+16$	a_2	$+7$	$+2$	$+16$	a_2	-5	-5	$\Rightarrow x_2 - 5x_3 = -5$
e_2	$+8$	$+3$	-7	$+9$	e_2	-13	-13	-39	e_2	0	0	
e_3	$+3$	$+1$	-2	$+4$	e_3	(-4)	-4	-12	a_1	$+1$	$+3$	$\Rightarrow x_1 + x_3 = +3$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = +3 - 1t \\ x_2 = -5 + 5t \quad \text{,ahol t} \in \mathbb{R} \\ x_3 = t \end{cases}$$