* TÁVOKTATÁS 2002. JÚNIUS 27. *

1. Az alábbi adatok ismeretében határozza meg a következőket!

   $P(3,-1,4)$; $\qquad e: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{2y-3}{5} = \dfrac{z+1}{2}$; $\qquad S: 2(2x+y+3) = z+1$

   (a) P pontra illeszkedő, e egyenessel párhuzamos egyenes egyenletrendszere;

   (b) P pontra illeszkedő, S síkkal párhuzamos sík egyenlete;

   (c) P pont és e egyenes távolsága;

   (d) e egyenes és S sík hajlásszöge.

2. Vizsgálja meg az $a_n = \dfrac{4n-1}{4n+7}$ sorozatot monotonítás és határérték szempontjából!
   Adjon meg $\varepsilon = 10^{-2}$-hoz küszöbindexet!

3. Vizsgálja meg monotonítás és lokális szélsőérték szempontjából az alábbi függvényt!
   $f(x) = x^3 \cdot \ln^x$

4. $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\, dx$

5. Adja meg grafikusan az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát, és határozza meg a függvény grafikonjához a $P(-2,3)$ pontban az érintősík egyenletét!

6. Oldja meg az $y'' - 3y' - 4y = -35\sin 3x - 5\cos 3x$ differenciálegyenletet!

7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & -6 \\ -x_1 & -7x_2 & -2x_3 & = & +3 \\ 9x_1 & -5x_2 & -2x_3 & = & +21 \end{array}$$

*** MEGOLDÓKULCS - 2002. MÁJUS 11. ***

1. (a) $\underline{v}_e(3, \frac{5}{2}, 2)$ és $P_0 = P$

$$f : x = \frac{x-3}{3} = \frac{2y+2}{5} = \frac{z-4}{2} \text{ vagy } \begin{cases} x = +3 + 3t \\ y = -1 + 2,5t \\ z = +4 + 2t \end{cases} \text{, ahol t} \in I\!R$$

(b) $\underline{n}_S(4, 2, -1)$ és $P_0 = P$

S': $4(x-3) + 2(y+1) - 1(z-4) = 0 \Longrightarrow 4x + 2y - z = 6$

(c) $Q(1, 4, 1)$ és $\overrightarrow{QP}(2, -5, 3)$

$$\overrightarrow{QP} \times \underline{v}_e = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ +2 & -5 & +3 \\ +3 & +2,5 & +2 \end{vmatrix} = -17,5\underline{i} + 5\underline{j} + 20\underline{k}$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \underline{v}_e\right|}{|\underline{v}_e|} = \frac{\sqrt{(2,5)^2 + (5)^2 + (20)^2}}{(3)^2 + (2,5)^2 + (2)^2} \approx 6,16$$

(d) $$\cos\beta = \frac{\underline{n}_S \cdot \underline{v}_e}{|\underline{n}_S| \cdot |\underline{v}_e|} = \frac{(4 \cdot 3) + (2 \cdot (2,5)) + ((-1) \cdot 2)}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (2,5)^2 + 2^2}} \approx 0,7460$$

$$\Longrightarrow \beta \approx 41,75^\circ \Longrightarrow \alpha = 90^\circ - \beta = 48,25^\circ$$

2. (a) $$a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)-1}{4(n+1)+7} - \frac{4n-1}{4n+7} = \frac{(4n+3)(4n+7) - (4n-1)(4n+11)}{(4n+11)(4n+7)} =$$

$$= \frac{+32}{(4n+11)(4n+7)} > 0 \Rightarrow a_n \uparrow$$

(b) $$a_n \uparrow \Rightarrow \text{ k} = a_1 = \frac{3}{11} \text{ és K} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{1}{n}}{4 - \frac{7}{n}} = 1$$

(c) $$\left|1 - \frac{4n-1}{4n+7}\right| < 10^{-2} \Rightarrow \left|\frac{+8}{4n+7}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow 800 < 4n + 7$$

$$n > \frac{800-7}{4} = 198,25 \Longrightarrow N(\varepsilon) = 198$$

3. $f(x) = x^3 \cdot \ln x \Longrightarrow D_f : I\!R^+$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot 1x = x^2(3\ln x + 1)$$

$$\Longrightarrow f'(x) \text{ zérushelyei: } \begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \ln \text{ miatt: } x \neq 0 \\ 3\ln x = -1 \Longrightarrow \ln x = -\dfrac{1}{3} \Longrightarrow x = e^{-\dfrac{1}{3}} \end{cases}$$

D_f	$0 < x < e^{-\frac{1}{3}}$	$x = e^{-\frac{1}{3}}$	$e^{-\frac{1}{3}} < x$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	MINIMUM	$\nearrow$

A szélsőérték nagysága:

$$f_{\text{min.}} = f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{3e}$$

4. $$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \begin{cases} t = e^x \\ x = \ln t \\ dx = \dfrac{1}{t}dt \end{cases} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^3}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}dt = [t - \operatorname{arctg} t]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= [e^x - \operatorname{arctg} e^x]_0^{\ln\sqrt{3}} = \left(e^{\ln\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\left(e^{\ln\sqrt{3}}\right)\right) - \left(e^0 - \operatorname{arctg}\left(e^0\right)\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$$

5. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ és $P(-2,+3)$

$\Longrightarrow \sqrt{\ }$ miatt: $x^2+y^2-9 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq +9$

$$f'_X = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2-9}} \cdot (+2x) \Rightarrow f'_X(P) = -1$$

$$f'_Y = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2-9}} \cdot (+2y) \Rightarrow f'_Y(P) = +\frac{3}{2}$$

$\Longrightarrow \underline{n}(-1, +\frac{3}{2}, -1)$, átalakítva $\underline{n}(+2,-3,+2)$, valamint $z_0 = f(P) = +2$

S: $2(x+2) - 3(y-3) + 2(z-2) = 0$, azaz $2x - 3y + 2z = -9$

6. $y'' - 3y' - 4y = -35\sin 3x - 5\cos 3x$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+3 \pm \overbrace{\sqrt{9+16}}^{25}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = +4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow Y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$$

$$\begin{cases} y_p = A\sin 3x + B\cos 3x \\ y'_p = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x \\ y''_p = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x \end{cases}$$

$$(-9A\sin 3x - 9B\cos 3x) - 3(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) - 4(A\sin 3x + B\cos 3x) = -35\sin 3x - 5\cos 3x$$

$$\begin{cases} -9A + 9B - 4A = -13A + 9B = -35 \\ -9B - 9A - 4B = -9A - 13B = -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = +2 \\ B = -1 \end{cases} \Longrightarrow {y'}_p = +2\sin 3x - 1\cos 3x$$

$$y = Y + {y'}_p = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + 2\sin 3x - \cos 3x$$

7. feladat megoldása:

	a_1	a_2	a_3	b		a_1	a_2	b		a_1	b	
e_1	-2	$+3$	$(+1)$	-6	a_3	-2	$+3$	-6	a_3	-17	-33	$\Rightarrow x_3 - 17x_1 = -33$
e_2	-1	-7	-2	$+3$	e_2	-5	-1	-9	e_2	0	0	
e_3	$+9$	-5	-2	$+21$	e_3	$+5$	$(+1)$	$+9$	a_2	$+5$	$+9$	$\Rightarrow x_2 + 5x_1 = +9$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = +9 - 5t \\ x_3 = -33 + 17t \end{cases} \quad \text{,ahol t} \in \mathbb{R}$$