* TÁVOKTATÁS 2002. JÚNIUS 21. *

1. Egy paralelogramma három csúcsa: $A(-2,5,7)$; $B(3,4,1)$ és $C(6,-5,3)$.
   (A és C szemközti csúcsok.

   (a) Határozza meg a középpont és a negyedik csúcs koordinátáit!

   (b) Írja fel az AB egyenes egyenletrendszerét!

   (c) Határozza meg a paralelogramma területét!

   (d) Határozza meg a paralelogramma A csúcsnál lévő szögét!

2. Határozza meg a következő határértékeket!

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4-3n}}{7n-12}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{\operatorname{sh}(1-x)}$

3. Írja fel az $f(x) = x^3 + 15x^2 + 78x - 93$ függvény grafikonjához az inflexiós pontban húzott érintő egyenletét!

4. $\displaystyle\int \frac{3x^2-8x-12}{x^3-4x}\, dx$

5. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az alábbi kétváltozós függvénynek!
   $f(x,y) = 3x^2 + 5x^4 + 2y^2 + 7y^4 - 11$

6. Oldja meg az $y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x} - 8e^{x}$ differenciálegyenletet!

7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & +6 \\ 3x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & +3 \\ 4x_1 & -11x_2 & +3x_3 & = & 0 \end{array}$$

* MEGOLDÓKULCS - 2002. MÁJUS 31. *

1. (a) K felezi a(z) $\overline{AC}$ átlót: $\begin{cases} k_1 = \dfrac{a_1 + c_1}{2} = +2 \\ k_2 = \dfrac{a_2 + c_2}{2} = 0 \\ k_3 = \dfrac{a_3 + c_3}{2} = +5 \end{cases} \Longrightarrow K(2,0,5)$

K felezi a(z) $\overline{BD}$ átlót: $\begin{cases} k_1 = \dfrac{b_1 + d_1}{2} \Rightarrow d_1 = 2k_1 - b_1 = +1 \\ k_2 = \dfrac{b_2 + d_2}{2} \Rightarrow d_2 = 2k_2 - b_2 = -4 \\ k_3 = \dfrac{b_3 + d_3}{2} \Rightarrow d_3 = 2k_3 - b_3 = +9 \end{cases} \Longrightarrow D(1,-4,9)$

(b) $\underline{v} = \overrightarrow{AB}(5,-1,-6)$ és $P_0 = A$

$$e : \frac{x+2}{5} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-7}{-6} \text{ vagy } \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = +5 - 1t \\ z = +7 - 6t \end{cases}, \text{ ahol t} \in I\!R$$

(c) $\overrightarrow{AC}(8,-10,-4)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ +5 & -1 & -6 \\ +8 & -10 & -4 \end{vmatrix} = -56\underline{i} - 28\underline{j} - 42\underline{k}$$

T: $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{56^2 + 28^2 + 42^2} = \sqrt{5684} \approx 75,39$

(d) $\overrightarrow{AD}(3,-9,2)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{(5\cdot 3) + ((-1)\cdot(-9)) + ((-6)\cdot 2)}{\sqrt{5^2+1^2+6^2}\cdot\sqrt{3^2+9^2+2^2}} = \frac{12}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{62}}$$

$\cos\alpha \approx 0,1572 \Longrightarrow \alpha \approx 50,4^\circ$

2. (a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 - 3n}}{7n - 12} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sqrt[3]{\dfrac{n^4}{n^3} - \dfrac{3}{n^2}}}{n \cdot \left(7 - \dfrac{12}{n}\right)} = \frac{\infty}{7} = \infty$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\mathrm{sh}(1-x)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 1} \frac{2x - 4}{\mathrm{ch}(1-x)\cdot(-1)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

3. $f(x) = x^3 + 15x^2 + 78x - 93 \Longrightarrow D_f = I\!R$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 30x + 78 \\ f''(x) = 6x + 30 = 0 \Longrightarrow x_{inf.} = -5 \end{cases}$$

D_f	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x$
f"	$-$	0	$+$
f	KONKÁV	INFL. PONT	KONVEX

Inflexiós pontban húzható érintő egyenes egyenlete: $y - f(x_{inf.}) = f'(x_{inf.}) \cdot (x - x_{inf.})$
$\Longrightarrow f(x_{inf.}) = (-5)^3 + 15 \cdot (-5)^2 + 78 \cdot (-5) - 93 = -233$
$\Longrightarrow f'(x_{inf.}) = 3 \cdot (-5)^2 + 30 \cdot (-5) + 78 = +3$

e: $y + 233 = 3(x+5) \Longrightarrow y = 3x - 218$

4. $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 8x - 12}{x^3 - 4x} dx = \int \frac{3x^2 - 8x - 12}{x(x-2)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} dx = * \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2 - 8x - 12}{x^3 - 4x} = \dfrac{Ax(x-2)(x+2)}{x} + \dfrac{Bx(x-2)(x+2)}{x-2} + \dfrac{Cx(x-2)(x+2)}{x+2} \\ 3x^2 - 8x - 12 = A(x^2 - 4) + B(x^2 + 2x) + C(x^2 - 2x) \\ x^2(+3) + x^1(-8) + x^0(-12) = x^2(A + B + C) + x^1(2B - 2C) + x^0(-4A) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} +3 = A + B + C \\ -8 = 2B - 2C \\ -12 = -4A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Rightarrow A = +3 \\ \Rightarrow\Rightarrow B = -2 \\ \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow C = +2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow * = \displaystyle\int \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} dx = \ln|x| - 2\ln|x+2| + 2\ln|x-2| + c = \ln\left[|x| \cdot \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2\right] + c$

5. $f(x,y) = 3x^2 - +5x^4 + 2y^2 + 7y^4 - 11$

$\begin{cases} f'_x = 6x + 20x^3 = 0 \\ f'_y = 4y + 28y^3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(6 + 20x^2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ y(4 + 28y^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Longrightarrow P(0,0)$

$\begin{cases} f''_{xx} = +6 + 60x^2 \\ f''_{yy} = +4 + 84y^2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$

$\left[(f''_{xx} \cdot f''_{yy}) - (f''_{xy})^2\right]|_P = (+6)(+4) - (0)^2 = +24 > 0 \Rightarrow P$-ben van szélsőérték.
$\Longrightarrow$ Mivel $f''_{xx}|_P = +6 > 0$,ezért $P(0,0)$-ben a függvénynek MINIMUMA van.

6. $y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x} - 8e^x$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+6 \pm \overbrace{\sqrt{36 - 52}}^{+4i}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = +3 + 2i \\ \lambda_2 = +3 - 2i \end{cases} \Longrightarrow Y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

$\begin{cases} y_p = Ae^{2x} + Be^x \\ y'_p = 2Ae^{2x} + Be^x \\ y''_p = 4Ae^{2x} + Be^x \end{cases}$

$$(4Ae^{2x} + Be^{x}) - 6(2Ae^{2x} + Be^{x}) + 13(Ae^{2x} + Be^{x}) = 5e^{2x} - 8e^{x}$$

$$\begin{cases} 4A - 12A + 13A = 5A = +5 \\ B - 6B + 13B = -8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = +1 \\ B = -1 \end{cases} \Longrightarrow {y'}_p = e^{2x} - e^{x}$$

$$y = Y + {y'}_p = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{2x} - e^{x}$$

7. feladat megoldása:

	a_1	a_2	a_3	b		a_1	a_2	b		a_1	b	
e_1	$+2$	$+3$	-1	$+6$	e_1	$+5$	-1	$+9$	e_1	0	0	
e_2	$+3$	-4	$(+1)$	$+3$	a_3	$+3$	-4	$+3$	a_3	-17	-33	$\Rightarrow x_3 - 17x_1 = -33$
e_3	$+4$	-11	$+3$	0	e_3	-5	$(+1)$	-9	a_2	-5	-9	$\Rightarrow x_2 - 5x_1 = -9$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -9 + 5t \\ x_3 = -33 + 17t \end{cases} \quad \text{,ahol t} \in I\!R$$