* TÁVOKTATÁS 2002. JÚNIUS 14. *

1. Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán!
   $(2-3i)z^3 + 14 + 6i = 10\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

2. Vizsgálja meg az $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+7}$ sorozatot monotonítás és korlátosság szempontjából. Határozza meg a sorozat határértékét, és adjon meg $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz küszöbindexet!

3. Vizsgálja meg konvexitás szempontjából az alábbi függvényt!
   $f(x) = (x^2 + 8x + 2)e^{(x+2)}$

4. $\int e^{2x} \sin 5x \, dx$

5. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az alábbi kétváltozós függvénynek!
   $f(x,y) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + y^2 + 8y + 4$

6. Oldja meg az $y'' - 2y' + 2y = 6x^2 - 14x + 18$ differenciálegyenletet!

7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rrrcr} 7x_1 & +10x_2 & +5x_3 & = & +8 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & +4 \\ 4x_1 & +5x_2 & +5x_3 & = & +1 \end{array}$$

* MEGOLDÓKULCS - 2002. jÚNIUS 14. *

1. $(2-3i)z^3+14+6i = 10\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) = -10-10i$

   $(2-3i)z^3 = -24-16i$

   $$z^3 = \frac{(-24-16i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{-48-32i-72i-48i^2}{4-9i^2} = \frac{-104i}{13} = -8i = 8(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$$

   $$z = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{270^\circ + k360^\circ}{3} + i\sin\frac{270^\circ + k360^\circ}{3}), \text{ ahol } k=0,1,2$$

   $$\begin{cases} z_1 = 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 2i \\ z_2 = 2(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ) = -\sqrt{3}-i \\ z_3 = 2(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ) = \sqrt{3}-i \end{cases}$$

2. (a) $$a_{n+1}-a_n = \frac{\overbrace{3(n+1)-1}^{3n+2}}{\underbrace{5(n+1)+7}_{5n+12}} - \frac{3n-1}{5n+7} = \frac{+26}{(5n+12)(5n+7)} > 0 \Rightarrow a_n \uparrow$$

   (b) $$a_n \uparrow \Rightarrow \text{k}= a_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ és K}= \text{A} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{5+\frac{7}{n}} = \frac{3}{5}$$

   (c) $$\left|\frac{3}{5} - \frac{3n-1}{5n+7}\right| < 10^{-3} \Longrightarrow \underbrace{\left|\frac{+26}{25n+35}\right|}_{>0} < \frac{1}{1000} \Longrightarrow 26000 < 25n+35$$

   $$n > \frac{26000-35}{25} = 1038,6 \Longrightarrow N(\varepsilon) = 1038$$

3. $f(x) = (x^2+8x+2)e^{(x+2)} \Longrightarrow D_f = I\!R$

   $$f'(x) = (2x+8)e^{(x+2)} + (x^2+8x+2)e^{(x+2)} = (x^2+10x+10)e^{(x+2)}$$

   $$f''(x) = (2x+10)e^{(x+2)} + (x^2+10x+10)e^{(x+2)} = (x^2+12x+20)\cdot \underbrace{e^{(x+2)}}_{\neq 0} = 0$$

   $$x^2+12x+20 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-12\pm\sqrt{144-80}}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -10 \end{cases}$$

D_f	$x<-10$	$x=-10$	$-10<x<-2$	$x=-2$	$-2<x$
f"	+	0	−	0	+
f	KONVEX	INF. PONT	KONKÁV	INF. PONT	KONVEX

4. $$\int \underbrace{e^{2x}\sin 5x}_{u\cdot v'}\,dx = \begin{cases} u' = 2e^{2x} \\ v = -\dfrac{-\cos 5x}{5} \end{cases} = e^{2x}\cdot\left(\frac{-\cos 5x}{5}\right) - \int \underbrace{2e^{2x}\cdot\left(\frac{-\cos 5x}{5}\right)}_{u\cdot v'} dx =$$

$$= \begin{cases} u' = 4e^{2x} \\ v = \dfrac{-\sin 5x}{25} \end{cases} = e^{2x}\cdot\left(\frac{-\cos 5x}{5}\right) - \left[2e^{2x}\cdot\left(\frac{-\sin 5x}{25}\right) - \int 4e^{2x}\cdot\left(\frac{-\sin 5x}{25}\right)dx\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int e^{2x}\sin 5x dx = \frac{-e^{2x}\cos 5x}{5} + \frac{2e^{2x}\sin 5x}{25} - \frac{4}{25}\int e^{2x}\sin 5x dx \\ \displaystyle\frac{29}{25}\int e^{2x}\sin 5x dx = \frac{2e^{2x}\sin 5x}{25} - \frac{e^{2x}\cos 5x}{5} + c \\ \displaystyle\int e^{2x}\sin 5x dx = \frac{2}{29}e^{2x}\sin 5x - \frac{5}{29}e^{2x}\cos 5x + c \end{cases}$$

5. $f(x,y) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + y^2 + 8y + 4$

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 30x + 36 = 0 \\ f'_y = 2y + 8 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{+5 \pm \overbrace{\sqrt{25-24}}^{1}}{2} = \begin{cases} x_1 = +2 \\ x_2 = +3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_1(+2,-4) \\ P_2(+3,-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xx} = 12x - 30 \\ f''_{yy} = +2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$$

$\left[(f''_{xx}\cdot f''_{yy}) - (f''_{xy})^2\right]|_{P_1} = (-6)(+2) - (0)^2 = -12 < 0 \Rightarrow P_1$-ben nincs szélsőérték.
$\left[(f''_{xx}\cdot f''_{yy}) - (f''_{xy})^2\right]|_{P_2} = (+6)(+2) - (0)^2 = +12 > 0 \Rightarrow P_2$-ben van szélsőérték.
$\Longrightarrow$ Mivel $f''_{xx}|_{P_2} = +6 > 0$,ezért $P_2(+3,+4)$-ben a függvénynek MINIMUMA van.

6. $y'' - 2y' + 2y = 6x^2 - 14x + 18$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+2 \pm \overbrace{\sqrt{4-8}}^{+2i}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = +1 + i \\ \lambda_2 = +1 - i \end{cases} \Longrightarrow Y = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

$$\begin{cases} y_p = Ax^2 + Bx + C \\ y'_p = 2Ax + B \\ y''_p = 2A \end{cases}$$

$$2A - 2(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 - 14x + 18$$

$$\begin{cases} 2A = +6 \\ -4A + 2B = -14 \\ 2A - 2B + 2C = +18 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Rightarrow A = +3 \\ \Rightarrow\Rightarrow B = -1 \\ \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow C = +5 \end{cases} \Longrightarrow y'_p = 3x^2 - x + 5$$

$$y = Y + y'_p = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x) + 3x^2 - x + 5$$

7. feladat megoldása:

	a_1	a_2	a_3	b		a_2	a_3	b		a_3	b	
e_1	$+7$	$+10$	$+5$	$+8$	e_1	(-4)	$+12$	-20	a_2	-3	$+5$	$\Rightarrow x_2 - 3x_3 = +5$
e_2	$(+1)$	$+2$	-1	$+4$	a_1	$+2$	-1	$+4$	a_1	$+5$	-6	$\Rightarrow x_1 + 5x_3 = -6$
e_3	$+4$	$+5$	$+5$	$+1$	e_3	-3	$+9$	-15	e_3	0	0	

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -6 - 5t \\ x_2 = +5 + 3t \quad \text{,ahol t} \in I\!R \\ x_3 = t \end{cases}$$