*** TÁVOKTATÁS 2002. JÚNIUS 06. ***

1. Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán!
   Adja meg a gyököket algebrai alakban is!
   $(2-5i)z^3+10-14i=30\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

2. Vizsgálja meg az $a_n=\dfrac{6n+9}{4n-3}$ sorozatot monotonítás és korlátosság szempontjából. Határozza meg a sorozat határértékét, és adjon meg $\varepsilon=10^{-2}$-hoz küszöbindexet!

3. Vizsgálja meg konvexitás szempontjából az alábbi függvényt!
   $f(x)=\ln(x^2+16)$

4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}\,dx$

5. Adja meg grafikusan az $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3y+7}}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát, és határozza meg a függvény grafikonjához a $P(0,2)$ pontban az érintősík egyenletét!

6. Oldja meg az $y''-4y'+4y=-8\sin 2x+24\cos 2x$ differenciálegyenletet!

7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +8x_2 & -18x_3 & = & +20 \\ 4x_1 & +13x_2 & +3x_3 & = & +31 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & +7 \end{array}$$

* MEGOLDÓKULCS - 2002. JÚNIUS 06. *

1. $(2-5i)z^3 + 10 - 14i = 30\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = -30 - 30i$

$(2-5i)z^3 = -40 - 16i$

$$z^3 = \frac{(-40-16i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{-80 - 32i - 200i - 80i^2}{4+25} = -8i = 8(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

$$z = \sqrt[3]{8}(\cos \frac{270^\circ + k360^\circ}{3} + i \sin \frac{270^\circ + k360^\circ}{3}), \text{ ahol } k = 0, 1, 2$$

$$\begin{cases} z_1 = 2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2i \\ z_2 = 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\sqrt{3} - i \\ z_3 = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

2. (a) $$a_{n+1} - a_n = \frac{\overbrace{6(n+1)+9}^{6n+15}}{\underbrace{4(n+1)-3}_{4n+1}} - \frac{6n+9}{4n-3} = \frac{-54}{(4n+1)(4n-3)} < 0 \Rightarrow a_n \downarrow$$

(b) $$a_n \downarrow \Rightarrow \text{K} = a_1 = 15 \text{ és k} = \text{A} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{9}{n}}{4 - \frac{3}{n}} = \frac{3}{2}$$

(c) $$\left|\frac{6n+9}{4n-3} - \frac{3}{2}\right| < 10^{-2} \Longrightarrow \underbrace{\left|\frac{27}{8n-6}\right|}_{>0} < \frac{1}{100} \Longrightarrow 2700 < 8n - 6$$

$$n > \frac{2706}{8} = 338,25 \Longrightarrow N(\varepsilon) = 338$$

3. $f(x) = \ln(x^2 + 16) \Longrightarrow D_f = I\!R$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+16} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+16}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+16) - 2x \cdot 2x}{(x^2+16)^2} = \frac{32 - 2x^2}{(x^2+16)}$$

Konvexitás vizsgálatakor keresendő(k) az $f''(x)$ zérushelye(i):
$x^2 = 16 \Longrightarrow x = \pm 4$

D_f	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < +4$	$x = +4$	$+4 < x$
f"	$-$	0	$+$	0	$-$
f	KONKÁV	INF. PONT	KONVEX	INF. PONT	KONKÁV

4. $\int\limits_{1}^{3} \frac{x}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}dx = \begin{cases} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{cases} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{t^2}{t^3+t}2tdt = 2\cdot\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\cdot\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt =$

$= 2\cdot\int\limits_{t_1}^{t_2} 1-\frac{1}{t^2+1}dt = 2\cdot[t-\mathrm{arctg}t]_{t_1}^{t_2} = 2\cdot[\sqrt{x}-\mathrm{arctg}\sqrt{x}]_1^3 =$

$= 2(\sqrt{3}-\mathrm{arctg}\sqrt{3})-2(\sqrt{1}-\mathrm{arctg}\sqrt{1}) = 2\sqrt{3}-2-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$

5. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x-3y+7}}$ és $P(0,2)$

$\Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{} \text{ miatt: } 2x-3y+7\geq 0 \Rightarrow y\leq \frac{2x+7}{3} \\ \text{az osztás miatt: } \sqrt{2x-3y+7}\neq 0 \Rightarrow y\neq \frac{2x+7}{3} \end{cases} \Longrightarrow y < \frac{2x+7}{3}$

$f'_X = -\frac{1}{2}\cdot(2x-3y+7)^{-\frac{3}{2}}\cdot(+2) \Longrightarrow f'_X(P) = -1$

$f'_Y = -\frac{1}{2}\cdot(2x-3y+7)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-3) \Longrightarrow f'_Y(P) = +\frac{3}{2}$

$\Longrightarrow \underline{n}(-1,+\frac{3}{2},-1)$, átalakítva $\underline{n}(+2,-3,+2)$, valamint $z_0 = f(P) = 1$

S: $2(x-0)-3(y-2)+2(z-1)=0$, azaz $2x-3y+2z=-4$

6. $y''-4y'+4y = -8\sin 2x+24\cos 2x$

$\lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = +2 \Longrightarrow Y = c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

$\begin{cases} y_p = A\sin 2x+B\cos 2x \\ y'_p = 2A\cos 2x-2B\sin 2x \\ y''_p = -4A\sin 2x-4B\cos 2x \end{cases}$

$(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)-4(2A\cos 2x-2B\sin 2x)+4(A\sin 2x+B\cos 2x) = -8\sin 2x+24\cos 2x$

$\begin{cases} +8B=-8 \\ -8A=+24 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=-3 \end{cases} \Longrightarrow y'_p = -3\sin 2x-1\cos 2x$

$y = Y+y'_p = c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}-3\sin 2x-\cos 2x$

7. feladat megoldása:

	a_1	a_2	a_3	b		a_2	a_3	b		a_3	b	
e_1	$+2$	$+8$	-18	$+20$	e_1	$+2$	-26	$+6$	e_1	0	0	
e_2	$+4$	$+13$	$+3$	$+31$	e_2	$(+1)$	-13	$+3$	a_2	-13	$+3$	$\Rightarrow x_2-13x_3=+3$
e_3	$(+1)$	$+3$	$+4$	$+7$	a_1	$+3$	$+4$	$+7$	a_1	$+43$	-2	$\Rightarrow x_1+43x_3=-2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 43t \\ x_2 = +3 + 13t \quad \text{,ahol t} \in I\!R \\ x_3 = t \end{cases}$$