* TÁVOKTATÁS 2002. MÁJUS 24. *

1. Adottak a következők:

   $A(-2,-5,4)$; e_1: $\dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-4}{3}$; e_2: $\dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{4}$

   (a) Határozza meg az A pontra illeszkedő és e_1 egyenessel párhuzamos egyenes egyenletrendszerét!

   (b) Írja fel az A pontra illeszkedő e_1 és e_2 egyenesekkel párhuzamos sík egyenletét!

   (c) Határozza meg e_1 és e_2 egyenesek szögét!

   (d) Határozza meg A pont és e_1 egyenes távolságát!

2. Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán!
   $(2-\sqrt{3}i)z^4+4-12\sqrt{3}i=24(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

3. Vizsgálja meg az $a_n=\dfrac{8n-7}{5n+2}$ sorozatot monotonítás és határérték szempontjából!
   Adjon meg $\varepsilon=10^{-3}$-hoz küszöbindexet!

4. $\int \cos\sqrt{5x-1}\,dx$

5. Adja meg és ábrázolja az $f(x,y)=\ln(25-x^2-y^2)\cdot\sqrt{4x+3y}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát, és határozza meg elsőrendű parciális deriváltjait!

6. Oldja meg az $y''-4y'+13y=10e^x-9e^{2x}$ differenciálegyenletet!

7. Határozza meg az alábbi mátrix inverzét!

$$A=\begin{pmatrix}-7 & -2 & -1\\ +7 & +3 & -11\\ +2 & +1 & -5\end{pmatrix}$$

* MEGOLDÓKULCS - 2002. MÁJUS 24. *

1. (a) $\underline{v}_f = \underline{v}_{e1}(2,5,3)$ és $P_0 = A$

$$\underline{v}_f : \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-2}{3} \text{ vagy } \begin{cases} x = +3+2t \\ y = -4+5t \quad t \in I\!R \\ z = +2+3t \end{cases}$$

(b) $\underline{n} = \underline{v}_{e1} \times \underline{v}_{e2} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ +2 & +5 & +3 \\ +7 & +2 & +4 \end{vmatrix} = 14\underline{i} + 13\underline{j} - 31\underline{k}$ és $P_0 = A$

$$S : 14(x-3) + 13(y+4) - 31(z-2) = 0 \Longrightarrow 14x + 13y - 31z = -72$$

(c) $\cos\alpha = \dfrac{|\underline{v}_{e1} \cdot \underline{v}_{e2}|}{|\underline{v}_{e1}| \cdot |\underline{v}_{e2}|} = \dfrac{2\cdot 7 + 5\cdot 2 + 3\cdot 4}{\sqrt{2^2+5^2+3^2}\cdot\sqrt{7^2+2^2+4^2}} = \dfrac{36}{\sqrt{38\cdot 69}} \Longrightarrow \alpha \approx 45,33^\circ$

2. $(2-\sqrt{3}i)z^4 + 4 - 12\sqrt{3}i = 24(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 12 + 12\sqrt{3}i$

$$(2-\sqrt{3}i)z^4 = 8 + 24\sqrt{3}i$$

$$z^4 = \frac{(8+24\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)}{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)} = \frac{16+48\sqrt{3}i+8\sqrt{3}i+24\cdot 3i^2}{4+3} = \frac{-56+56\sqrt{3}i}{7} = -8+8\sqrt{3}i$$

$$z^4 = \sqrt{8^2+8^2\cdot 3}\cdot(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$

$$z = \sqrt[4]{16}(\cos\frac{120^\circ + k360^\circ}{4} + i\sin\frac{120^\circ + k360^\circ}{4}), \text{ ahol } k = 0,1,2,3$$

3. (a) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{\overbrace{8(n+1)-7}^{8n+1}}{5(n+1)+2} - \dfrac{8n-7}{5n+2} = \dfrac{+51}{(5n+7)(5n+2)} > 0 \Rightarrow a_n \uparrow$

(b) $a_n \uparrow \Rightarrow$ k$= a_1 = \dfrac{1}{7}$ és K= A $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8-\frac{7}{n}}{5+\frac{2}{n}} = \dfrac{8}{5}$

(c) $\left|\dfrac{8}{5} - \dfrac{8n-7}{5n+2}\right| < 10^{-3}$

$$\underbrace{\left|\frac{51}{25n+10}\right|}_{>0} < \frac{1}{1000}$$

$$51000 < 25n + 10$$

$$n > \frac{51000-10}{25} = 2039,6 \Longrightarrow N(\varepsilon) = 2039$$

4. $\int \cos\sqrt{5x-1}\,dx = \begin{cases} t=\sqrt{5x-1} \\ x=\dfrac{t^2+1}{5} \\ dx=\dfrac{2}{5}tdt \end{cases} = \underbrace{\int \cos t\cdot\frac{2}{5}tdt}_{v'\cdot u} = \begin{cases} v=\sin t \\ u'=\dfrac{2}{5} \end{cases} = \frac{2}{5}t\sin t - \int\frac{2}{5}\sin tdt =$

$= \frac{2}{5}t\sin t + \frac{2}{5}\cos t + c = \frac{2}{5}\sqrt{5x-1}\sin\sqrt{5x-1} + \frac{2}{5}\cos\sqrt{5x-1} + c$

5. $f(x,y) = \ln(25-x^2-y^2)\cdot\sqrt{4x+3y} \Longrightarrow \begin{cases} \ln \text{ miatt: } 25-x^2-y^2>0 \Rightarrow x^2+y^2<25 \\ \sqrt{\ } \text{ miatt: } 4x+3y\geq 0 \Rightarrow y\geq -\dfrac{4}{3}x \end{cases}$

$$f'_X = \frac{1}{25-x^2-y^2}\cdot(-2x)\cdot\sqrt{4x+3y} + \ln(25-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{4x+3y}}\cdot(+4)$$
$$f'_Y = \frac{1}{25-x^2-y^2}\cdot(-2y)\cdot\sqrt{4x+3y} + \ln(25-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{4x+3y}}\cdot(+3)$$

6. $y''-4y'+13y = 10e^x - 9e^{2x}$

$$\lambda^2-4\lambda+13=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+4\pm\overbrace{\sqrt{16-52}}^{+6i}}{2} = \begin{cases} \lambda_1=+2+3i \\ \lambda_2=+2-3i \end{cases} \Longrightarrow Y = e^{2x}(c_1\sin 3x + c_2\cos 3x)$$

$$\begin{cases} y_p = Ae^x + Be^{2x} \\ {y'}_p = Ae^x + 2Be^{2x} \\ {y''}_p = Ae^x + 4Be^{2x} \end{cases}$$

$$(Ae^x+4Be^{2x}) - 4(Ae^x+2Be^{2x}) + 13(Ae^x+Be^{2x}) = 10e^x - 9e^{2x}$$

$$\begin{cases} 10A=+10 \\ 9B=-9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=+1 \\ B=-1 \end{cases} \Longrightarrow {y'}_p = e^x - e^{2x}$$

$$y = Y + {y'}_p = e^{2x}(c_1\sin 3x + c_2\cos 3x) + e^x - e^{2x}$$

7. feladat megoldása:

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	-7	-2	-1	$+1$	0	0
e_2	$+7$	$+3$	-11	0	$+1$	0
e_3	$+2$	$(+1)$	-5	0	0	$+1$

	a_1	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	-3	-11	$+1$	0	$+2$
e_2	$(+1)$	$+4$	0	$+1$	-3
a_2	$+2$	-5	0	0	$+1$

	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	$(+1)$	$+1$	$+3$	-7
a_1	$+4$	0	$+1$	-3
a_2	-13	0	-2	$+7$

$$
\begin{array}{c|ccc||}
 & e_1 & e_2 & e_3 \\
\hline
a_3 & +1 & +3 & -7 \\
a_1 & -4 & -11 & +25 \\
a_2 & +13 & +37 & -84
\end{array}
\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -11 & +25 \\ +13 & +37 & -84 \\ +1 & +3 & -7 \end{pmatrix}
$$