1 Feladatok

1. Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex számok körében.

$$\sqrt[5]{i\frac{1-i}{2+i}}$$

2. Határozzuk meg, hogy monoton-e valamilyen értelemben az alábbi sorozat, számoljuk ki a határértékét és adjunk küszöbindexet $\varepsilon = 0.01$-hez.

$$a_n = \frac{1-2n}{3n+1}$$

3. Számoljuk ki az alábbi sorozat határértékét.

$$a_n = n\left(\sqrt{(n-1)^2} - \sqrt{n^2-2n-4}\right)$$

4. Határozzuk meg az alábbi függvény értelmezési tartományát.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+2}}$$

5. Számoljuk ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x+2}\right)^{x^2-1}$$

6. Határozzuk meg az alábbi függvény deriváltfüggvényét.

$$f(x) = \ln(x^2 - \sin(1-x^2))$$

7. Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ függvény inflexiós érintőjét.

2 Megoldás

1. Jelöljük z-vel a gyökjel alatti komplex számot. Először algebrai alakban elvégezzük a gyökjel alatti műveleteket. Beszorozva i-vel

$$z = i\frac{1-i}{2+i} = \frac{i-i^2}{2+i} = \frac{1+i}{2+i}$$

Most az osztás elvégzéséhez bővítünk a nevező konjugáltjával.

$$\frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}.$$

Elvégezve a szorzásokat azt kapjuk, hogy

$$z = \frac{3+i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Ez z algebrai alakja. Ahhoz, hogy 5-ödik gyököt tudjunk vonni z-ből fel kell írnunk a trigonometrikus alakját. A komplex számsíkon ábrázoljuk z-t és bejelöljük a szögét.

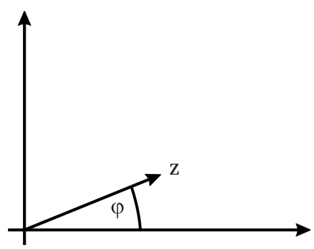

Figure 1: z és a szöge

Ez látható az (1) ábrán.

Látjuk, hogy z az első síknegyedbe esik. A trigonometrikus alakhoz szükségünk van z hosszára és szögére. z hossza

$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

φ-vel jelölve z szögét az ábráról látjuk, hogy φ az az első síknegyedbe eső szög, amelynek tangense

$$\text{tg } \varphi = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

Ebből számológéppel azt kapjuk, hogy $\varphi = 18,43°$. Így z trigonometrikus alakja

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{\sqrt{10}}{5}\left(\cos 18,43° + i\sin 18,43°\right).$$

Mostmár az

$$\sqrt[5]{z} = z_k = \sqrt[5]{\frac{\sqrt{10}}{5}} \left(\cos\left(\frac{18,43^\circ}{5} + k\frac{360^\circ}{5} \right) + i \sin\left(\frac{18,43^\circ}{5} + k\frac{360^\circ}{5} \right) \right)$$

formulát használva fel tudjuk írni z 5 darab 5-ödik gyökét. A szokásos módon jelölve a gyököket és figyelembe véve, hogy $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{10}}{5}} \approx 0,91$, $\frac{18,43^\circ}{5} \approx 3,69^\circ$ és $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ azt kapjuk, hogy

$$z_0 = 0,91(\cos(3,69^\circ+0\cdot 72^\circ)+i\sin(3,69^\circ+0\cdot 72^\circ)) = 0,91(\cos 3,69^\circ+i\sin 3,69^\circ),$$

$$z_1 = 0,91(\cos(3,69^\circ+1\cdot 72^\circ)+i\sin(3,69^\circ+1\cdot 72^\circ)) = 0,91(\cos 75,69^\circ+i\sin 75,69^\circ),$$

$$z_2 = 0,91(\cos(3,69^\circ+2\cdot 72^\circ)+i\sin(3,69^\circ+2\cdot 72^\circ)) = 0,91(\cos 147,69^\circ+i\sin 147,69^\circ),$$

$$z_3 = 0,91(\cos(3,69^\circ+3\cdot 72^\circ)+i\sin(3,69^\circ+3\cdot 72^\circ)) = 0,91(\cos 219,69^\circ+i\sin 219,69^\circ),$$

$$z_4 = 0,91(\cos(3,69^\circ+4\cdot 72^\circ)+i\sin(3,69^\circ+4\cdot 72^\circ)) = 0,91(\cos 291,69^\circ+i\sin 291,69^\circ).$$

2. Kiszámítjuk a sorozat néhány elemét. $a_1 = -0,25$, $a_9 \approx -0,61$, $a_{83} \approx -0,66$, $a_{2567} \approx -0,666$. Ezek alapján az a sejtésünk, hogy a sorozat monoton csökkenő. Ehhez azt kell igazolnunk, hogy $a_n \geq a_{n+1}$ minden n-re vagy valahonnan kezdve minden n-re. Kiírva a_n és a_{n+1} képletét

$$\frac{1-2n}{3n+1} \geq \frac{1-2(n+1)}{3(n+1)+1}.$$

A jobb oldali törtben elvégezve a műveleteket és az összevonásokat

$$\frac{1-2n}{3n+1} \geq \frac{-2n-1}{3n+4}.$$

Hogy eltüntessük a törteket szorozzuk meg az egyenlőtlenséget először a bal oldali nevezővel majd a jobb oldali nevezővel. Mivel mindkettő minden n-re pozitív nem változik az egyenlőtlenség iránya. Kapjuk

$$(1-2n)(3n+4) \geq (-2n-1)(3n+1).$$

Beszorozva és összevonva

$$-6n^2 - 5n + 4 \geq -6n^2 - 5n - 1$$

azaz

$$4 \geq -1.$$

Ez minden n-re igaz, tehát a sorozat monoton növő. Sőt, mivel $4 > -1$ és mivel minden átalakítás ekvivalens átalakítás volt, azt is igazoltuk, hogy a sorozat szigorúan monoton nő.

A határérték kiszámolásához emeljünk ki számlálóból nevezőből n-et.

$$a_n = \frac{1-2n}{3n+1} = \frac{n\left(\frac{1}{n}-2\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}.$$

Egyszerűsítve n-el, mivel $\frac{1}{n}$ nullához tart, a számláló -2-höz, a nevező 3-hoz tart, tehát a határérték $-\frac{2}{3}$.

Az ε-hoz tartozó küszöbindex meghatározásához az

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk, ahol A a határértéket jelöli. Elvégezve a helyettesítéseket

$$\left|\frac{1-2n}{3n+1} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{1-2n}{3n+1} + \frac{2}{3}\right| < 0,01.$$

Közös nevezőre hozva az abszolút értéken belül

$$\left|\frac{3(1-2n)+2(3n+1)}{3(3n+1)}\right| = \left|\frac{5}{3(3n+1)}\right| < 0,01.$$

Az utolsó törtben a számláló és a nevező is minden n-re pozitív, így a tört abszolút értéke önmaga, azaz

$$\frac{5}{3(3n+1)} < 0,01.$$

Ha most mindkét oldalt szorozzuk a minden n-re pozitív $3n+1$-el és osztunk a szintén pozitív $0,01$-el

$$\frac{5}{3 \cdot 0,01} < 3n+1,$$

azaz

$$\frac{\frac{5}{3 \cdot 0,01} - 1}{3} < n,$$

vagyis

$$55,22 < n.$$

Innen a keresett küszöbindex $N(0,01) = 55$.

3. A sorozatot definiáló képlet első tényezője $+\infty$-be tart, a második tényezője azomban "$\infty - \infty$" típusú határozatlan alak. Mivel benne azonos kitevőjű gyökök különbsége szerepel ezért, a négyzetreemelés elvégzése után, gyöktelenítünk.

$$a_n = n\left(\sqrt{(n-1)^2} - \sqrt{n^2-2n-4}\right) = n\left(\sqrt{n^2-2n+1} - \sqrt{n^2-2n-4}\right) =$$

$$= n\left(\frac{(n^2-2n+1)-(n^2-2n-4)}{\sqrt{n^2-2n+1}+\sqrt{n^2-2n-4}}\right) = \frac{5n}{\sqrt{n^2-2n+1}+\sqrt{n^2-2n-4}}.$$

Ez a tört még mindig "$\frac{\infty}{\infty}$" típusú határozatlan alak mivel a számlálója és a nevezője is $+\infty$-be tart. Ezért kiemeléssel próbálkozunk. Látható, hogy n-et célszerű a számlálóból és a nevezőből kiemelni.

$$a_n = \frac{n\cdot(5)}{n\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}\right)}.$$

n-el való egyszerűsítés után leolvasható, hogy a számláló 5-höz, a nevezőben mindkét gyök alatti mennyiség 1-hez tart, tehát a sorozat határértéke $\frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$.

4. Négyzetgyököt nemnegatív számból tudunk vonni, ezért az a feltétel, hogy

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség két esetben teljesül. Az első eset amikor a tört nulla. Ebből a feltételből adódó halmazt jelöljük H_1-el. A második eset az amikor a tört pozitív. Az ebből adódó halmazt jelöljük H_2-vel. Mivel egy tört akkor nagyobb vagy egyenlő mint nulla ha az értéke nulla **vagy** pozitív a D_f a H_1 és a H_2 uniója lesz.

A tört értéke azokra az x-ekre lesz nulla, amelyekre a számlálója nulla **és** a nevezője pedig nem nulla. A számláló $x = -1$ esetén nulla, a nevezőben álló másodfokú polinom gyöktényezős felbontása $(x-1)(x-2)$, tehát a nevező gyökei $x = 1$ és $x = 2$. A számláló gyöke nincs ezek között, tehát a tört $x = -1$-re nulla, azaz $H_1 = \{-1\}$.

A tört értéke azokra az x-ekre lesz pozitív, amelyekre a számláló **és** a nevező is pozitív **vagy** amelyekre a számláló **és** a nevező is negatív. Így H_2-t is két halmaz uniójaként fogjuk megkapni.

Nézzük először azt az esetet amikor a számláló is és a nevező is pozitív. Az $x + 1 > 0$ azzal ekvivalens, hogy $x > -1$. Ábrázoljuk ezt a halmazt egy számegyenesen.

Figure 2: H_2 első része

Ezt láthatjuk a (2) ábra felső számegyenesén vastag vonallal jelölve. A nevezőben álló másodfokú kifejezés grafikonja felfele nyíló parabola, mert a főeggyüttható pozitív, így az a két gyökén kívül pozitív, tehát akkor ha $x < 1$ vagy $x > 2$. Ezt a halmazt mutatja a középső rajz. Ügyeljünk arra, hogy a számegyenesek origója és az egy egységet ábrázoló pont pontosan egymás alá kerüljön. A számláló és a nevező azokban a pontokban pozitív egyszerre amelyeket mindkét számegyenesen vastagon jelöltünk. Ezeket a pontokat jelöltük a harmadik számegyenesen vastagon. Az ábráról leolvasható, hogy ez a halmaz $(-1, 1) \cup (2, \infty)$. Ez tehát H_2 egyik része.

Nézzük meg azt az esetet amikor a számláló és a nevező is negatív. Ekkor egyrészt az kell $x < -1$ legyen a számláló miatt. Másrészt a nevezőben álló másodfokú, felfele nyíló parabola a két gyöke között vesz fel negatív értékeket, tehát $1 < x < 2$-nek is teljesülni kell. Nyiván nincs olyan x amelyre ez a két feltétel egyszerre teljesülne, így H_2 második része az üres halmaz, tehát $H_2 = (-1, 1) \cup (2, \infty)$.

Ezek után $D_f = H_1 \cup H_2 = [-1, 1) \cup (2, \infty)$.

5. Ebben a hatványban az alap 1-hez, a kitevő ∞-hez tart, tehát a határérték a ”1^∞” típusba tartozik. Felhasználjuk, hogy ha $k \in \mathbf{Z}$ és $\lim_{x \longrightarrow \infty} r(x) = \infty$ akkor

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{r(x)}\right)^{r(x)} = e^k.$$

Ez a sorozatoknál tanult tétel közvetlen altalánosítása. Először most is felírjuk az alapban lévő tört számlálóját a nevező és ami még szükséges összegeként.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + x + 2}\right)^{x^2 - 1} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(2x^2 + x + 2) + (-3)}{2x^2 + x + 2}\right)^{x^2 - 1}$$

Ha most a számlálóban álló összeget elosztjuk a nevezővel azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{2x^2 + x + 2}\right)^{x^2 - 1}.$$

Látjuk, hogy esetünkben a $k = -3$ és $r(x) = 2x^2 + x + 2$, ami tart ∞-be, ha $x \longrightarrow \infty$. Becsempészük az alap kitevőjébe $r(x)$-et és az eredeti kitevőt úgy módosítjuk, hogy az egyenlőség megmaradjon

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{2x^2 + x + 2}\right)^{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{2x^2 + x + 2}\right)^{2x^2 + 2x + 2}\right]^{\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 2x + 2}}.$$

Mostmár a szögletes zárójelen belüli függvény az említett tétel értelmében tart e^{-3}-hoz, a legkülső kitevőben lévő tört két másodfokú polinom hányadosa, ∞-ben a limesze tehát a főegyütthatók hányadosa azaz $1/2$. Így az egész kifejezés határértéke

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{2x^2 + x + 2}\right)^{2x^2 + 2x + 2}\right]^{\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 2x + 2}} = \left(e^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{-3}{2}}.$$

6. A függvény összetett fügvény, ezért a láncszabályt kell alkalmazni a derivált függvény előállításához. A külső függvény a természetes alapú logaritmus, aminek a deriváltja a reciprok függvény. A belső függvény egy összeg, amit tagonként kell deriválni, figyelembe véve, hogy a második tag maga is egy összetett függvény. Tehát

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - \sin(1 - x^2)} \big(2x - \cos(1 - x^2)(-2x)\big) \,.$$

7. Először meghatározzuk az inflexiós pontot. Ehhez a második deriváltra van szükség.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f"(x) = 6x - 4$$

Inflexiós pont ott lehet, ahol a második derivált nulla. A $6x - 4 = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x_0 = 2/3$. Meg kell vizsgálni, hogy ez valóban inflexiós pont-e. Az x_0 a D_f-et, ami nyilván az egész számegyenes, két részre bontja, az x_0-nál kisebb illetve nagyobb számokra. Ezért a táblázat a következő

x	$-\infty < x < 2/3$	$2/3$	$2/3 < x < \infty$
$f"(x)$		0	

Most egyszerű $f"(x)$ előjelének megállapítása a kapott tartományokon és a táblázat kitöltése. Az első tartományból az $x = 0$-t behelyettesítve $f"(0) = -4$, ezért az egész tartományon negatív az $f"(x)$. A második tartományból $x = 1$-et behelyettesítve $f"(1) = 2$, ezért az egész tartományon pozitív az $f"(x)$. Tehát a kitöltött táblázat

x	$-\infty < x < 2/3$	$2/3$	$2/3 < x < \infty$
$f"(x)$	-	0	+

Láthatjuk, hogy 2/3-ban a második derivált előjelet vált, ez tehát valóban inflexiós pont, aminek második koordinátája $f(2/3) = -\frac{25}{27}$.

Az inflexiós pontban húzott érintő meredeksége az első derivált értéke a szóbanforgó pontban, azaz $m = f'(2/3) = -\frac{1}{3}$.

Így az keresett érintő egyenlete

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = m$$

$$\frac{y + \frac{25}{27}}{x - \frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}$$

Ebből y így fejezhető ki

$$y = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{25}{27} = -\frac{x}{3} - \frac{19}{27}.$$