1 Feladatok

1. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet.

$$z^6 + z^3 - 6 = 0$$

2. Vizsgáljuk meg, hogy monoton-e az alábbi sorozat és $\varepsilon = 0,01$-hez adjunk küszöbindexet.

$$a_n = -2 + \frac{1}{1-2n}$$

3. Határozzuk meg az alábbi sorozat határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$$

4. Tekintsük az alábbi függvényeket.

$$f(x) = \sin(2^x), \qquad g(x) = \frac{1}{1-x}$$

Írjuk fel a $h(x) = f(g(f(x)))$ függvény képletét.

5. Számítsuk ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{-2x^2 + 2x + 4}$$

6. Írjuk fel az $f(x) = e^{2x}\sqrt{2-x}$ függvény $x_0 = 1$-beli érintőjét.

7. Hol van minimuma az $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 6$ függvénynek és mekkora a minimum értéke?

1. Az algebra alaptételéből tudjuk, hogy 6 gyöke van az egyenletünknek. Vegyük észre, hogy az egyenlet z^3-ben másodfokú. Ezért bevezetjük a $z^3 = u$ helyettesítést. Ekkor az egyenlet az $u^2 + u - 6 = 0$ alakot ölti. Ez egy másodfokú egyenlet. A megoldóképlettel megoldva vagy észrevéve, hogy az egyenlet $(u + 3)(u - 2) = 0$ alakban szorzatra bontható meghatározható a két gyök. Ezek $u_1 = -3$ és $u_2 = 2$. A 6 darab gyököt úgy kapjuk meg hogy ezekből köbgyököt vonunk. Vonjunk köbgyököt először u_1-ből. Ehhez felírjuk u_1 trigonometrikus alakját. A komplex számsíkon ábrázolva u_1-et láthatjuk, hogy u_1 hossza 3 és szöge $\varphi = 180°$. Tehát u_1 trigonometrikus alakja

$$u_1 = 3(\cos 180° + i \sin 180°).$$

A gyökvonás képletét használva, mivel most $n = 3$, kapjuk $\frac{\varphi}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$, $\frac{360°}{3} = 120°$, tehát a 3 köbgyök

$$u_{1,0} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 0 \cdot \frac{360°}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 0 \cdot \frac{360°}{3}\right)\right)$$

$$= \sqrt[3]{3}\left(\cos 60° + i \sin 60°\right),$$

$$u_{1,1} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 1 \cdot \frac{360°}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 1 \cdot \frac{360°}{3}\right)\right)$$

$$= \sqrt[3]{3}\left(\cos 180° + i \sin 180°\right),$$

$$u_{1,2} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 2 \cdot \frac{360°}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 2 \cdot \frac{360°}{3}\right)\right)$$

$$= \sqrt[3]{3}\left(\cos 300° + i \sin 300°\right).$$

Rátérünk u_2-re. A komplex számsíkon ábrázolva u_2-et láthatjuk, hogy u_2 hossza 2 és szöge $\varphi = 0°$. Tehát u_2 trigonometrikus alakja

$$u_1 = 2(\cos 0° + i \sin 0°).$$

Ismét használva a gyökvonás képletét, persze most is $n = 3$, kapjuk $\frac{\varphi}{3} = \frac{0°}{3} = 0°$, $\frac{360°}{3} = 120°$, tehát a 3 köbgyök

$$u_{2,0} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 0 \cdot \frac{360°}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 0 \cdot \frac{360°}{3}\right)\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ\right),$$

$$u_{2,1} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 1\cdot\frac{360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 1\cdot\frac{360^\circ}{3}\right)\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ\right),$$

$$u_{2,2} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 2\cdot\frac{360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 2\cdot\frac{360^\circ}{3}\right)\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ\right).$$

2. Kiszámítjuk a sorozat néhány elemét. $a_1 = -3$, $a_{10} \approx -2,053$, $a_{867} \approx -2,00058$. Mivel ezek a számok növekvők azt próbáljuk igazolni, hogy a sorozat monoton növekvő. Ehhez azt kell belátni, hogy

$$a_n \leq a_{n+1}$$

valahonnan kezdve minden n-re. Elvégezve a helyettesítést

$$a_n = \underline{-2 + \frac{1}{1-2n}} \leq -2 + \frac{1}{1-2(n+1)} = \underline{-2 + \frac{1}{-1-2n}} = a_{n+1}$$

az aláhúzott egyenlőtlenséget kell igazolni. Adjunk mindkét oldalhoz kettőt, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1-2n} \leq \frac{1}{-1-2n}.$$

Ha egyenként keresztbeszorzunk a nevezőkkel, mivel mindkettő minden n-re negatív, az egyenlőtlenség iránya kétszer megfordul, tehát

$$-1-2n \leq 1-2n,$$

$$-1 \leq 1.$$

Ez egy minden n-re igaz egyenlőtlenség, tehát a sorozat valóban monoton növekvő. Az is látszik, hogy a $\leq$ mindenütt $<$-re cserelhető, tehát a_n szigorúan monoton növekvő.

Rátérünk a küszöbindex meghatározására. Nyilvánvaló, hogy a határérték $A = -2$. Így az

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

azaz a

$$\left| -2 + \frac{1}{1-2n} - (-2) \right| < 0,01$$

$$\left| -2 + \frac{1}{1-2n} + 2 \right| < 0,01$$

$$\left| \frac{1}{1-2n} \right| < 0,01$$

egyenlőtlenséget kell megoldani. Mivel a tört nevezője és így a tört is minden n-re negatív az abszolút értéke a tört mínusz egyszerese, azaz

$$-\frac{1}{1-2n} < 0,01.$$

Átszorozva a negatív nevezővel és rendezve

$$-1 > 0,01 \cdot (1 - 2n)$$

$$-100 > 1 - 2n$$

$$-101 > -2n.$$

Osztva -2-vel azt kapjuk, hogy

$$50,5 < n.$$

Ebből a keresett küszöbindex $N(0,01) = 50$.

3. A sorozat "$\infty - \infty$" típusú és ha a második tagban szereplő n-et $\sqrt{n^2}$-ként írjuk fel gyökök különbségét kapjuk. Ezért gyöktelenítéssel próbálkozunk.

$$a_n = \sqrt{n^2+2n} - n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2} =$$

$$= \frac{(n^2+2n)-(n^2)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2}}.$$

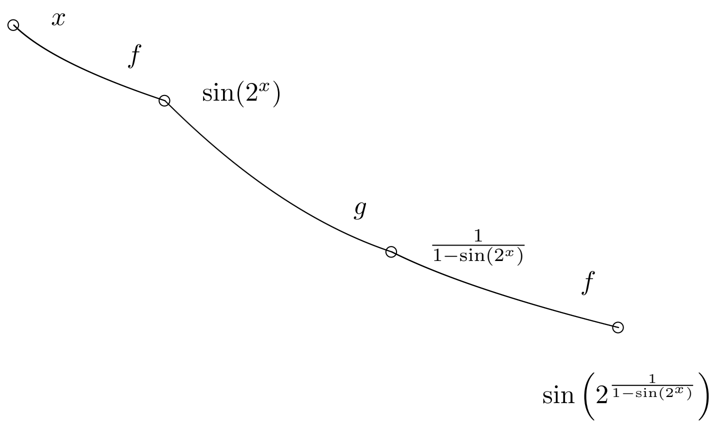
Ez a tört "$\frac{\infty}{\infty}$" típusú és látható, hogy a számláló és a nevező nagyságrendje is n. Ezért számlálóból és nevezőből is kiemelünk n-et. Ekkor

$$a_n = \frac{n \cdot 2}{n \cdot \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1}\right)}.$$

n-el való egyszerűsítés után látható, hogy a számláló 2-höz és a nevező is 2-höz tart, tehát

$$a_n \longrightarrow \frac{2}{2} = 1.$$

4. Ábrázoljuk a kompozíció tagjainak hatását a következő ábrával.



Tehát

$$h(x) = \sin\left(2^{\frac{1}{1-\sin(2^x)}}\right).$$

5. A határérték ”$\frac{0}{0}$” típusú, mert a -1 a számlálónak és a nevezőnek is gyöke. Számlálóból nevezőből kiemeljük a -1-hez tartozó gyöktényezőt, $x+1$-et. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x^2+4x+3}{-2x^2+2x+4}=\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{(x+1)(x+3)}{-2(x+1)(x-2)}.$$

Egyszerűsítve $x+1$-el a

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x+3}{-2(x-2)}$$

határértéket kell kiszámolni. Ebben a törtben a számláló 2-höz a nevező 6-hoz tart, ha x tart -1-hez, tehát

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x+3}{x-2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

6. Először meghatározzuk $f(x_0)$-t. $f(x_0) = f(1) = e^{2\cdot 1}\sqrt{2-1} = e^2$. Az érintő meredekségének kiszámolásához szükség van az f függvény derivált függvényére. f-et a szorzat függvény deriválási szabályát használva kell deriválni.

$$f'(x) = \left(e^{2x}\right)' \sqrt{2-x} + e^{2x}(\sqrt{2-x})' =$$

$$= e^{2x} \cdot 2 \cdot \sqrt{2-x} + e^{2x}\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (-1) = 2e^{2x}\sqrt{2-x} - e^{2x}\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

hiszen e^{2x} és $\sqrt{2-x}$ is összetett függvény.

Ezek után az érintő m meredeksége

$$m = 2e^{2\cdot 1}\sqrt{2-1} - e^{2\cdot 1}\frac{1}{2\sqrt{2-1}} = 2e^2 - \frac{e^2}{2} = \frac{3}{2}e^2.$$

Az érintő egyenlete tehát a

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

formula alapján

$$\frac{y - e^2}{x - 1} = \frac{3}{2}e^2,$$

ebből

$$y = \frac{3}{2}e^2(x-1) + e^2 = \frac{3e^2}{2}x - \frac{e^2}{2} \approx 11,08x - 3,69.$$

7. Tudjuk, hogy lokális minimum ott lehet ahol az első derivált 0. Meghatározzuk $f'(x)$-et.

$$f'(x) = f(x) = -\frac{4}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 8x = -4x^2 + 16x.$$

Az $f'(x) = 0$ egyenletnek a két gyöke $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$. Ezeken a helyeken lehet tehát minimum. Az első deriváltra vonatkozó táblázat alapján megvizsgáljuk, hogy melyik valóban minimum hely.

Először is mivel a $D_f = \mathbf{R}$ a két gyök ezt három darabra osztja. Ezek a darabok és a zérushelyek szerepelnek tehát a táblázat fejlécében. A táblázat tehát

x	$-\infty < x <$	0	$0 < x < 4$	4	$4 < x < \infty$
$f'(x)$		0		0	

Most kitöltjük a táblázatot. Mivel $f'(x)$ grafikonja lefelé nyíló parabola $f'(x)$ a két gyökén kívül negatív, a két gyöke között pozitív, így

x	$-\infty < x <$	0	$0 < x < 4$	4	$4 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Leolvasható, hogy f' a nullában előjelet vált, mégpedig negatívból pozitívba, tehát ez valóban minimum hely. A másik jelöltben lokális maximum van, tehát az egyetlen lokális minimum hely a 0.