1 Feladatok

1. Tekintsük a $z_1 = -1 + 2i$ és a $z_2 = 2(\sin(120°) - i\cos(120°))$ komplex számokat. Számoljuk ki a

$$\sqrt[3]{(1 + z_1)(2 - \overline{z_2})}$$

értékeit.

2. Számoljuk ki az alábbi sorozat határértékét.

$$a_n = \sqrt{\sqrt{1 + n^2} - \sqrt{n^2 - n}}$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvény értelmezési tartományát.

$$f(x) = \ln(4 - \sqrt{x}) + \sqrt{x(4 - x)}$$

4. Határozzuk meg az f függvény deriváltfüggvényét, ha

$$f(x) = \sin^2\left(x - \frac{x}{x - 1}\right).$$

5. Számoljuk ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2 x}$$

6. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen.

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

2 Megoldás

1. A gyökvonás alatti műveleteket az össszeadás és kivonás miatt algebrai alakban tudjuk csak elvégezni. Először felírjuk z_2 algebrai alakját.

$$z_2 = 2(\sin(120°) - i\cos(120°)) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{-1}{2}i\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$

$$= \left(\sqrt{3} + i\right)$$

Így a gyök alatti mennyiség

$$(1 + z_1)(2 - \overline{z_2}) = 2i(2 - \sqrt{3} - i) = 2 + 2(2 - \sqrt{3})i.$$

Felírjuk ennek trigonometrikus alakját. Ha ábrázoljuk ezt a komplex számot láthatjuk, hogy az első negyedbe esik. Hossza $r = \sqrt{2^2 + (2 - \sqrt{3})^2} \approx 2,07$. A

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{2}$$

összefüggésből $\varphi = 15°$, tehát a

$$2,07(\cos 15° + i \sin 15°)$$

komplex számból kell köbgyököt vonni.
Mivel $\frac{\varphi}{3} = 5°$ és $\frac{360°}{3} = 120°$ a három darab 3. gyök

$$z_0 = \sqrt[3]{2,07}(\cos(5° + 0 \cdot 120°) + i\sin(5° + 0 \cdot 120°)) = 1,27(\cos 5° + i \sin 5°)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2,07}(\cos(5° + 1 \cdot 120°) + i\sin(5° + 1 \cdot 120°)) = 1,27(\cos 125° + i \sin 125°)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2,07}(\cos(5° + 2 \cdot 120°) + i\sin(5° + 2 \cdot 120°)) = 1,27(\cos 245° + i \sin 245°.)$$

2. Ha bevezetjük a $b_n = \sqrt{1+n^2} - \sqrt{n^2-n}$ sorozatot akkor $a_n = \sqrt{b_n}$ tehát a_n határétéke b_n határértékének négyzetgyöke. Kiszámoljuk b_n határétékét. Mivel b_n "$\infty - \infty$" típusú és négyzetgyökök különbsége okozza ezt gyöktelenítést végzünk.

$$b_n = \sqrt{1+n^2} - \sqrt{n^2-n} = \frac{(1+n^2)-(n^2-n)}{\sqrt{1+n^2}+\sqrt{n^2-n}} =$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{1+n^2}+\sqrt{n^2-n}}$$

Ez "$\frac{\infty}{\infty}$" típusú határérték és a számláló és a nevező nagyságrendje is n, ezért kiemelünk a számlálóból és a nevezőből is n-et. Így azt kapjuk, hogy

$$b_n = \frac{n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)}{n \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}.$$

n-el egyszerűsítve leolvasható, hogy a számláló 1-hez a nevező pedig 2-höz tart. Végül tehát

$$b_n \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad \text{tehát} \qquad a_n \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

3. Ha H_1-el jelöljük a valós számoknak azt a részhalmazát, ahol az $\ln(4 - \sqrt{x})$ kifejezés értelmezhető és H_2-vel azt a részhalmazt, ahol a $\sqrt{x(4-x)}$ kifejezés értelmezhető akkor $D_f = H_1 \cap H_2$. Meghatározzuk először H_1-et. Mivel logatimusa pozitív számnak vehető az a feltétel, hogy $4 - \sqrt{x} > 0$, azaz $\sqrt{x} < 4$. x-nek tehát a gyökvonás miatt nemnegatívnak kell lenni és az utolsó egyenlőtlenség, mivel $\sqrt{x} \geq 0$, felírható így is

$$0 \leq \sqrt{x} < 4.$$

Ebből négyzetreemeléssel

$$0 \leq x < 16$$

adódik tehát $H_1 = [0, 16)$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum.

Rátérünk H_2 meghatározására. Négyzetgyököt nemnegatív számból vonhatunk, tehát az a feltétel, hogy $x(4 - x) \geq 0$. A gyök alatti másodfokú kifejezés grafikonja lefelé nyíló parabola, ami a két gyöke között pozitív. A két gyök most $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$. Tehát $H_2 = [0, 4]$ zárt intervallum. Végül

$$D_f = H_1 \cap H_2 = [0, 16) \cap [0, 4] = [0, 4].$$

4. A függvény egy többszörösen összetett függvény, tehát deriválásakor a láncszabályt kell használni. $f(x)$ felírható $f(x) = r(s(t(x)))$ alakban, ahol $r(x) = x^2$, $s(x) = \sin x$ és $t(x) = x - \frac{x}{x-1}$. Elkészítjük a kompozíció tagjainak derivált függvényét.

$$r'(x) = 2x, \quad s'(x) = \cos x,$$

$$t'(x) = 1 - \frac{(x)'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} = 1 - \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} = 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Tudjuk, hogy $f'(x) = r'(s(t(x))) \cdot s'(t(x)) \cdot t'(x)$. Behelyettesítve

$$f'(x) = 2 \sin\left(x - \frac{x}{x-1}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{x}{x-1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

5. A határérték "$\frac{0}{0}$" típusú. A l'Hospital-féle szabályt fogjuk használni a határérték kiszámolására. Jelöljük a számlálóban álló függvényt $f(x)$-el, a nevezőben állót $g(x)$-el. A számláló deriváltja

$$f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot e^x + x^2 \left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x.$$

A nevező deriváltja

$$g'(x) = 2 \sin x \cos x.$$

Ezek alapján

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(2x + x^2)e^x}{2 \sin x \cos x}.$$

Vegyük észre, hogy a nevező $\sin 2x$. Tehát

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(2x + x^2)e^x}{\sin 2x}.$$

Ez még mindig "$\frac{0}{0}$" típusú. Ennek a határértéknek a kiszámolását is a l'Hospital-féle szabállyal próbáljuk meg.

Mivel $f"(x) = (2+2x)e^x + (2x+x^2)e^x = (2+4x+x^2)e^x$ és $g"(x) = 2\cos 2x$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f"(x)}{g"(x)} = \frac{(2 + 4x + x^2)e^x}{2 \cos 2x}.$$

Ebben a törtben $x \longrightarrow 0$ esetén a számláló és a nevező is 2-höz tart, tehát kétszer alkalmazva a l'Hospital-féle szabályt

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f"(x)}{g"(x)} = 1$$

így

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1,$$

végül

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2e^x}{\sin^2 x} = 1.$$

6. Egy teljes függvényvizsgálat az alábbi kilenc lépésből áll.

- Értelmezési tartomany.

  Most egyszerű a helyzet, nyilvánvaló, hogy $f(x)$ minden x-re értelmes, tehát $D_f = \mathbf{R}$.

- Alaki tulajdonságok.

  Először nézzük az úgynevezett x-tengely metszetet. A függvény zérushelyeit az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kaphatjuk meg, most látszik, hogy egy zérushely van az $x = 0$. Az y tengelymetszet meghatározásához kiszámiljuk $f(0)$-t, ami most 0.

  Térjünk rá a paritás vizsgálatára. Először előállítjuk $f(-x)$ képletét.

  $$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)} = x^2 e^x.$$

  Ez nem egyenlő $f(x)$-el és nem egyenlő $-f(x)$-el sem, tehát a függvény se nem páros se nem páratlan.

- Limeszek a D_f szélein.

  Mivel $D_f = \mathbf{R}$ két határértéket kell kiszámolni. Ezek

  $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) \quad \text{és} \quad \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x).$$

  $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^2 e^{-x}.$$

  Ebben a szorzatban $x \longrightarrow -\infty$ esetén mindkét tényező $+\infty$-be tart, így a szorzat is, tehát

  $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

  A másik határérték esetén célszerű $f(x)$-et törtként felírni.

  $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

  Láthatjuk, hogy ez egy ”$\frac{\infty}{\infty}$” típusú határérték. A l’Hospital szabályt fogjuk használni. A deriváltak hányadosának határértéke

  $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

  még mindíg ”$\frac{\infty}{\infty}$” típusú, tehát ezt is a l’Hospital szabállyal számoljuk ki. Most a deriváltak hányadosának határértéke

  $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

ezért

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x}{e^x}=0$$

és végül

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}f(x)=0$$

- Lokális szélsőértékhelyek.

  Először ekészítjük $f'(x)$-et. $f(x)$-et a szorzatfüggvény deriválási szabály alpján kell deriválni.

  $$f'(x)=\left(x^2\right)'e^{-x}+x^2\left(e^{-x}\right)'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}.$$

  Tudjuk, hogy szélsőérték ott lehet, ahol $f'(x)=0$. A $(2x-x^2)e^{-x}=0$ egyenletnek két gyöke van $x_1=0$ és $x_2=2$. Mivel D_f az egész $\mathbf{R}$ mindkettőt meg kell vizsgálni. A vizsgálatot táblázat segítségével végezzük el. A fejlécben a jelöltek által feldarabolt D_f szerepel, tehát a táblázat

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<\infty$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

  Az első tartományból például az $x=-1$-et választva $f'(-1)=-3e$, ami negatív, így $f'(x)$ az egész $(-\infty,0)$ intervallumon negatív. Beírva a táblázatba

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<\infty$
$f'(x)$	-	0		0	
$f(x)$					

  A $(0,2)$ intervallumból az $x=1$-et választva $f'(1)=e^{-1}$, azaz itt végig pozitív az f', végül a $(2,\infty)$ intervallumból az $x=3$-t választva $f'(3)=-3e^{-3}$ vagyis itt f' negatív. Beírva ezeket a táblázatba kapjuk

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

  Láthatjuk, hogy f' a 0-ban és a 2-ben is előjelet vált, tehát mindkét hely lokális szélsőérték hely. Mivel a 0-ban f' negatívból pozitívba vált itt lokalis minimum van. Ennek értéke $f(0)=0$. Mivel a 2-ben f' pozitívból negatívba vált itt lokális maximum van. Ennek értéke $f(2)=4e^{-2}\approx 0,54$.

- Monotonitási szakaszok

  Tudjuk, hogy ahol az f' negatív ott az f csökken, ahol az f' pozitív ott f növekszik. Bejelölve ezt a táblázatba

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

tehát f a $(-\infty, 0)$ intervallumon csökken a $(0, 2)$ intervallumon nő, a $(2, \infty)$ intervallumon ismét csökken.

- Inflexiós pontok.

  Inflexiós pont ott lehet, ahol a második derivált nulla. Elkészítjük a $f"(x)$-et.

$$f"(x) = (2x - x^2)'e^{-x} + (2x - x^2)\left(e^{-x}\right)' =$$

$$= (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$

Az $f"(x) = 0$ egyenletnek két gyöke van, az $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,58$ és az $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$. Hogy ezek közül melyik valóban inflexiós pont azt ismét egy táblázat segítségével vizsgáljuk meg. A fejlécben megint a jelöltek által feldarabolt D_f szerepel, tehát a táblázat

x	$-\infty < x < 0,58$	$0,58$	$0,58 < x < 3,41$	$3,41$	$3,41 < x < \infty$
$f"(x)$		0		0	
$f(x)$					

$f"(x)$ előjele, mivel e^{-x} mindig pozitív, megegyezik a $2-4x+x^2$ másodfokú polinom előjelével, ami, mivel a főegyüttható pozitív, két gyökén kívül pozitív, a két gyöke között negatív. Ez alapján a táblázat így alakul.

x	$-\infty < x < 0,58$	$0,58$	$0,58 < x < 3,41$	$3,41$	$3,41 < x < \infty$
$f"(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Láthatjuk, hogy a második derivált mindkét jelöltben előjelet vált, tehát mindkettő valóban inflexiós pont. $f(2-\sqrt{2}) \approx 0,19$ és $f(2+\sqrt{2}) \approx 0,38$.

- Konkáv és konvex szakaszok.

  Mivel a függvény ott konvex ahol az $f"$ pozitív és ott konkáv ahol az $f"$ negatív, kitöltve a táblázatunkat

x	$-\infty < x < 0,58$	$0,58$	$0,58 < x < 3,41$	$3,41$	$3,41 < x < \infty$
$f"(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex		konkáv		konvex

- Mindezek alapján felrajzolhatjuk f grafikonját. Ekkor a következő ábrát kaphatjuk.