1 Feladatok

1. Tekintsük a következő komplex számokat:

$$z_1 = 2 + i, \qquad z_2 = 1 - i.$$

   Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékeit.

$$\sqrt[4]{\frac{\overline{z_1} + z_2}{z_1 - z_2}}$$

2. Tekintsük az

$$a_n = \frac{n-1}{n^2}$$

   sorozatot. Állapítsuk meg, hogy monoton-e a_n, számoljuk ki a határértékét és adjunk küszöbindexet $\varepsilon = 0,01$-hez.

3. Számoljuk ki az alábbi sorozat határértékét.

$$a_n = \left(\frac{3n^2 - n}{3n^2 - n + 2}\right)^{n^2-1}$$

4. Határozzuk meg az f függvény értelmezési tartományát, ha

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x+2}\right).$$

5. Számoljuk ki a

$$\lim_{x \longrightarrow 1} e^{\frac{x^2-1}{x-x^2}}$$

   határértéket.

6. Határozzuk meg az

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$$

   függvény derivált függvényét.

7. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{(3-x)x}$ függvény $x_0 = 1$-beli érintőjét.

2 Megoldás

1. Először kiszámoljuk algebrai alakban a gyök alatti komplex számot. Jelöljük ezt z-vel. Mivel $\overline{z_1} = 2 - i$

$$z = \frac{\overline{z_1} + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{(2-i)+(1-i)}{(2+i)-(1-i)} = \frac{3-2i}{1+2i}.$$

Elvégezzük az osztást. Bővítve a nevező konjugáltjával

$$z = \frac{3-2i}{1+2i} = \frac{3-2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(3-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}.$$

Elvégezve a szorzásokat

$$z = \frac{-1-8i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i.$$

Ebből a z-ből kell tehát $4.$ gyököt vonni. Ehhez először felírjuk z trigonometrikus alakját. Ábrázolva z-t a komplex számsíkon látható, hogy a harmadik negyedbe esik. Meghatározzuk először z argumentumát, amit jelöljünk φ-vel. Kiszámolva a

$$\text{tg}\,\tau = \frac{\left|-\frac{8}{5}\right|}{\left|-\frac{1}{5}\right|} = 8$$

összefüggésből a τ-t, azt kapjuk, hogy $\tau = 82,88°$.

Mivel z a harmadik negyedbe esik $\varphi = 180° + \tau = 262,88°$. z hosszára azt kajuk, hogy

$$r = |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{5}.$$

Így z trigonometrikus alakja

$$z = \frac{\sqrt{65}}{5}(\cos 262,88° + i \sin 262,88°).$$

Mivel $\frac{\varphi}{4} = \frac{262,88°}{4} = 65,72°$ és $\frac{360°}{4} = 90°$ z 4 darab negyedik gyöke a következő:

$$z_0 = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{65}}{5}}(\cos(65,72^\circ + 0 \cdot 90^\circ) + i \sin(65,72^\circ + 0 \cdot 90^\circ)) =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{65}}{5}}(\cos 65,72^\circ + i \sin 65,72^\circ),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{65}}{5}}(\cos(65,72^\circ + 1 \cdot 90^\circ) + i \sin(65,72^\circ + 1 \cdot 90^\circ)) =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{65}}{5}}(\cos 155,72^\circ + i \sin 155,72^\circ),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{65}}{5}}(\cos(65,72^\circ + 2 \cdot 90^\circ) + i \sin(65,72^\circ + 2 \cdot 90^\circ)) =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{65}}{5}}(\cos 245,72^\circ + i \sin 245,72^\circ),$$

$$z_3 = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{65}}{5}}(\cos(65,72^\circ + 3 \cdot 90^\circ) + i \sin(65,72^\circ + 3 \cdot 90^\circ)) =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{65}}{5}}(\cos 335,72^\circ + i \sin 335,72^\circ).$$

2. Kiszámolva a_n néhány elemét, például $a_2 = 0,25$, $a_5 = 0,16$, $a_100 = 0,0099$ azt sejtjük, hogy a_n monoton csökkenő. Próbáljuk meg tehát azt bebizonyítani, hogy

$$a_n \geq a_{n+1}$$

valahonnan kezdve minden n-re. Behelyettesítve a_n-t és a_{n+1}-et kapjuk, hogy a

$$\frac{n-1}{n^2} \geq \frac{(n+1)-1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n^2+2n+1}$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Mivel a nevezők minden n-re pozitívak átszorozva velük az egyenlőtlenség iránya nem változik, tehát

$$(n-1)(n^2+2n+1) \geq n \cdot n^2.$$

Beszorozva és egyszerűsítve

$$n^3 + n^2 - n - 1 \geq n^3$$

$$n^2 - n - 1 \geq 0.$$

Mivel az $x^2 - x - 1$ másodfokú kifejezés grafikonja felfelé nyíló parabola az a két gyökén kívül lesz pozitív. Az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 \approx -0,62$ és $x_2 \approx 1,62$. Mivel n pozitív egész az $n^2 - n - 1 \geq 0$ egyenlőtlenség teljesülni fog, ha n $1,62$-nél nagyobb pozitív egész, azaz ha $n > 1$. Ez azt jelenti, hogy a sorozat valóban monoton csökkenő.

Meghatározzuk a_n határértékét. Mivel az a_n-et megadó képlet két polinom hányadosa és a nevező másodfokú ezért a számlálóból és a nevezőből is kiemelünk n^2-et.

$$a_n = \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \cdot 1} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1}.$$

Mivel ebben a törtben a számláló 0-hoz, a nevező 1-hez tart a_n határértéke $A = 0$.

Nézzük a küszöbindex meghatározását. Tudjuk, hogy az

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

azaz behelyettesítés után az

$$\left|\frac{n-1}{n^2}-0\right|<0,01$$

$$\left|\frac{n-1}{n^2}\right|<0,01$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Mivel a $\frac{n-1}{n^2}$ tört minden n-re nemnegatív az előbbi egyenlőtlenség az

$$\frac{n-1}{n^2}<0,01$$

alakot ölti. Ezt rendezve, mivel n^2 és $0,01$ is pozitív, a

$$100n-100<n^2$$

vagyis az

$$n^2-100n+100>0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Megint felfelé nyíló paraboláról van szó, a két gyök $n_1\approx-107,8$, $n_2\approx 207,8$. Tehát az $n^2-100n+100>0$ egyenlőtlenség teljesül ha $n<-107,8$ vagy ha $n>207,8$. Mivel n pozitív egész kell, hogy legyen csak az $n>207,8$ a megoldás. Ebből pedig a küszöbindex $N(0,01)=207$.

3. Ez a határérték "1^∞" típusú. Első lépésként az alap számlálóját felírjuk mint a nevező és még valami összege.

$$a_n = \left(\frac{3n^2-n}{3n^2-n+2}\right)^{n^2-1} = \left(\frac{(3n^2-n+2)+(-2)}{3n^2-n+2}\right)^{n^2-1}$$

Ezután elosztjuk a nevezővel a számlálóban álló kéttagú összeget. Kapjuk

$$a_n = \left(1+\frac{-2}{3n^2-n+2}\right)^{n^2-1}.$$

A következő lépésben kialakítjuk azt a szerkezetet ami a használni kívánt tételben szerepel:

$$a_n = \left[\left(1+\frac{-2}{3n^2-n+2}\right)^{3n^2-n+2}\right]^{\frac{n^2-1}{3n^2-n+2}}$$

Mostmár a szögletes zárójelen belüli kifejezés határértéke e^{-2} és ennek kitevője tart $\frac{1}{3}$-hoz. Ezért azt kapjuk, hogy

$$a_n \longrightarrow \left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{-2}{3}}.$$

4. Az $\arcsin$ függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ zárt intervallum. Ezért az a feltétel, hogy

$$-1 \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 1$$

Két esetre bontjuk a vizsgálatot aszerint, hogy a tört nevezője milyen előjelű.

$\alpha)$ A nevező pozitív, azaz $x + 2 > 0$, vagyis $x > -2$. Ekkor a fenti egyenlőtlenségpárban a nevezővel való szorzás után nem változnak a egyenlőtlenségek irányai. Azt kapjuk, hogy

$$-(x+2) \leq x+1 \leq x+2.$$

Megoldjuk először a baloldali $-(x + 2) \leq x + 1$ egyenlőtlenséget. Ennek megoldása $x \geq -1,5$. A jobboldali $x+1 \leq x+2$ egyenlőtlenség minden x-re igaz, tehát mindkét egyenlőtlenség teljesül, ha $x \geq -1,5$. Ezt összevetve az $x > -2$ feltétellel azt kapjuk, hogy az α esetben a megoldás $x \geq 1,5$.

$\beta)$ A nevező negatív, azaz $x + 2 < 0$, vagyis $x < -2$. Ekkor a fenti egyenlőtlenségpárban a nevezővel való szorzás után mindkét egyenlőtlenség iránya megfordul. Azt kapjuk, hogy

$$-(x+2) \geq x+1 \geq x+2.$$

Most a baloldali $-(x + 2) \geq x + 1$ egyenlőtlenség megoldás $x \leq -1,5$ de a jobboldali $x + 1 \geq x + 2$ egyenlőtlenség semilyen x-re sem teljesül, a közös megoldás tehát az $\emptyset$.

Végül tehát a függvény értelmezési tartománya az α-beli halmaz és a β-beli halmaz uniója, vagyis

$$D_f = [-1,5; \infty).$$

5. Nézzük először a kitevőben lévő törtet. Ennek határértéke 1-ben ”$\frac{0}{0}$” típusú aminek az az oka, hogy az 1 gyöke a számlálónak és a nevezőnek is. Ezért számlálóból, nevezőből kiemeljük az 1-hez tartozó gyöktényezőt az $(x-1)$-et. Ekkor

$$\frac{x^2-1}{x-x^2} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(-x)}.$$

Tehát a kitevő határértéke

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-1}{x-x^2} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(-x)} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x+1}{-x} = -2.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-1}{x-x^2} = e^{-2}.$$

6. Az f összetett függvvény.

$$f(x) = h(g(x)),$$

ha

$$h(x) = \sqrt{x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = \frac{1-x}{x^2}.$$

Tudjuk, hogy $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$. Mivel

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

és

$$g'(x) = \frac{(1-x)'(x^2) - (1-x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{-1 \cdot (x^2) - (1-x) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}$$

azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}} \cdot \frac{x-2}{x^3}.$$

7. $f(x_0) = f(1) = \sqrt{2}$. Tudjuk, hogy az érintő meredeksége $f'(x_0) = f'(1)$. Hogy ezt ki tudjuk számolni meg kell határozni az f derivált függvényét.

Az $f(x) = \sqrt{(3-x)x} = \sqrt{3x - x^2}$ függvény összetett függvény. $f(x) = h(g(x))$, ha $h(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = 3x - x^2$. Mivel $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ és $g'(x) = 3 - 2x$ azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x - x^2}} \cdot (3 - 2x).$$

Tehát $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Az érintő egyenlete az

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

formulából

$$\frac{y - \sqrt{2}}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$y - \sqrt{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$