# 1 Feladatok

1. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet.
$$z^6 + z^3 - 2 = 0$$
2. Monoton-e valamilyen értelemben az
$$a_n = 1 - \frac{n}{n-1}$$
sorozat? Határozzuk meg a határértékét és $\varepsilon = 0,01$-hez adjunk küszöbindexet.
3. Számítsuk ki az alábbi sorozat határéetékét.
$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2}}$$
4. Határozzuk meg az $f$ függvény értelmezési tartományát, ha
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{3 + 2x - x^2}.$$
5. Számítsuk ki az alábbi határértéket.
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x^2} - \sqrt{x+2}}{x}$$
6. Deriváljuk az
$$f(x) = \ln(\sin(x^2 - x))$$
függvényt.
7. Hol monoton növő az $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ függvény?

## 2 Megoldás

1. Vegyük észre, hogy az egyenlet $z^3$-ben másodfokú. Bevezetve az $u = z^3$ jelölést egyenletünk az

$$u^2 + u - 2 = 0$$

alakot ölti. A megoldóképlettel kiszámítjuk ennek a gyökeit.

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Tehát $u_1 = 1$ és $u_2 = -2$.

Először köbgyököt vonunk $u_1$-ből. $u_1$-et ábrázolva a komplex számsíkon könnyen leolvasható, hogy $u_1$ hossza $r = 1$ és szöge $\varphi = 0°$, tehát $u_1$ trigonometrikus alakja

$$u_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos 0° + i\sin 0°.$$

Elvégezve a köbgyökvonást, mivel $\frac{\varphi}{3} = 0°$ és $\frac{360°}{3} = 120°$ kapjuk

$$u_{1,0} = \sqrt[3]{1}(\cos(0° + 0 \cdot 120°) + i\sin(0° + 0 \cdot 120°)) = \cos 0° + i\sin 0°,$$

$$u_{1,1} = \sqrt[3]{1}(\cos(0° + 1 \cdot 120°) + i\sin(0° + 1 \cdot 120°)) = \cos 120° + i\sin 120°,$$

$$u_{1,2} = \sqrt[3]{1}(\cos(0° + 2 \cdot 120°) + i\sin(0° + 2 \cdot 120°)) = \cos 240° + i\sin 240°.$$

Most köbgyököt vonunk $u_2$-ből. $u_2$-et ábrázolva a komplex számsíkon leolvasható, hogy $u_2$ hossza $r = 2$ és szöge $\varphi = 180°$, tehát $u_2$ trigonometrikus alakja

$$u_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2(\cos 180° + i\sin 180°).$$

Mivel $\frac{\varphi}{3} = 60°$ és $\frac{360°}{3} = 120°$

$$u_{2,0} = \sqrt[3]{2}(\cos(60^\circ+0\cdot120^\circ)+i\sin(60^\circ+0\cdot120^\circ)) = \sqrt[3]{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ),$$

$$u_{2,1} = \sqrt[3]{2}(\cos(60^\circ+1\cdot120^\circ)+i\sin(60^\circ+1\cdot120^\circ)) = \sqrt[3]{2}(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ),$$

$$u_{2,2} = \sqrt[3]{2}(\cos(60^\circ+2\cdot120^\circ)+i\sin(60^\circ+2\cdot120^\circ)) = \sqrt[3]{2}(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ).$$

2. Alakítsuk át először a sorozatot megadó képletet a következő módon:

$$a_n = 1 - \frac{n}{n-1} = \frac{(n-1)-n}{n-1} = \frac{-1}{n-1}.$$

Kiszámítjuk a sorozat néhány elemét. Például $a_{11} = -0,1$, $a_{101} = -0,01$ és $a_{1001} = -0,001$. Ezek alapján az a sejtésünk, hogy $a_n$ monoton növő, ezt próbáljuk tehát igazolni. Ehhez azt kell igazolni, hogy

$$a_n \leq a_{n+1}$$

valahonnan kezdve minden $n$-re.

Behelyettesítve ebbe az egyenlőtlenségbe

$$\frac{-1}{n-1} \leq \frac{-1}{(n+1)-1} = \frac{-1}{n}$$

Ha $n \geq 2$ mindkét nevező pozitív, átszorozva velük nem változik az egyenlőtlenség iránya, tehát

$$-n \leq -(n-1).$$

Beszorozva ezt $-1$-el

$$n \geq n-1$$

$$0 \geq -1.$$

Ez utóbbi egy minden $n$-re igaz egyenlőtlenség, tehát a sorozat (szigorúan) monoton nő, ha $n \geq 2$. (A sorozat ilyen $n$-ekre is értelmezhető csak.)

A sorozatunk a $0$-hoz tartó $\frac{1}{n}$ sorozat egy részsorozatának $-1$ szerese, tehát $a_n$ határértéke $A = 0$.

A küszöbindex kiszámolásához megoldjuk az

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Behelyettesítve

$$\left|\frac{-1}{n-1} - 0\right| < 0,01$$

$$\left|\frac{-1}{n-1}\right| < 0,01.$$

Az abszolút értéken belüli tört amikor értelmezve van negatív, így az abszolút értéke önmaga mínusz egyszerese, vagyis az

$$\frac{1}{n-1} < 0,01$$

egyenlőtlenséget kell megoldani. Ebből $n - 1 > 100$ vagyis $n > 101$, tehát $N(0,01) = 101$.

3. A sorozatot megadó tört nevezőjében a gyökök különbsége miatt egy "$\infty - \infty$" típusú határozatlan alak áll. Ezért gyöktelenítjük a tört nevezőjét.

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2}} = \frac{n^2}{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2})\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2}}} =$$

$$= \frac{n^2}{\frac{(n^2+n)-(n^2-2)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2}}} = \frac{n^2(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2})}{(n^2+n)-(n^2-2)} =$$

$$= \frac{n^2(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2})}{n+2}.$$

Ez a tört "$\frac{\infty}{\infty}$" típusú és mivel a nevező elsőfokú számlálóból és nevezőből kiemelünk $n$-et.

$$a_n = \frac{n \cdot n(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2})}{n \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{n(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2})}{1+\frac{2}{n}}.$$

A számláló most $+\infty$-be, a nevező 1-hez tart, tehát $a_n \longrightarrow +\infty$.

4. Az $f$-et definiáló képlet egy összeg. Jelöljük $H_1$ azt a halmazt, ahol az első tört értelmezhető, $H_2$-vel azt a halmazt, ahol a gyökös kifejezés értelmezhető. Nyilván $D_f = H_1 \cap H_2$.

   Meghatározzuk $H_1$-et. A tört mindenütt értelmezhető kivéve ahol a nevezője $0$. A nevező gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$, tehát

   $$H_1 = \mathbf{R} \setminus \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty).$$

   $H_2$ esetén az a feltétel, hogy $3+2x-x^2 \geq 0$ legyen. Egy negatív főegyütthatójú másodfokú kifejezés a két gyöke között pozitív. A $3 + 2x - x^2 = 0$ gyökei $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$, tehát

   $$H_2 = [-1, 3].$$

   Mostmár

   $$D_f = H_1 \cap H_2 = [-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3].$$

5. Ez a határérték "$\frac{0}{0}$" típusú. A gyökök különbsége miatt gyöktelenítjük a számlálót.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{2-x^2}-\sqrt{x+2}}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(2-x^2)-(x+2)}{x(\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x+2})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-x^2-x}{x(\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-x-1}{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x+2}}$$

Most a számláló $-1$-hez, a nevező $2\sqrt{2}$-höz tart vagyis

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-x-1}{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x+2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

6. $f(x)$ felírható $f(x) = r(s(t(x)))$ alakban, ahol

$$r(x) = \ln x, \qquad s(x) = \sin x, \qquad t(x) = x^2 - x.$$

Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$f'(x) = r'(s(t(x))) \cdot s'(t(x)) \cdot t'(x).$$

Minthogy

$$r'(x) = \frac{1}{x}, \quad s'(x) = \cos x, \quad t'(x) = 2x - 1$$

azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(x^2 - x)} \cdot \cos(x^2 - x) \cdot (2x - 1).$$

7. Egy függvény értelmezési tartományának azon a részhalmazain monoton növő ahol a deriváltja pozitív. A mi esetünkben $D_f = \mathbf{R}$, mert a másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív, a főegyüttható pozitív, így a logaritmus argumentuma minden $x$-re pozitív.

   Most

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

   Ez a tört ott pozitív ahol a számláló és a nevező is az, (mivel a nevező minden $x$-re pozitív).

$$2x+1>0, \quad \text{ha} \qquad x>-\frac{1}{2},$$

   vagyis $f$ a $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ intervallumon monoton növő.