MATEMATIKA II.
3.Gyakorlat
(környezetmérnök)
2007. február 12-16.

FELADATOK A GYAKORLATRA, HÁZI FELADATOK ÉS GYAKORLÓ FELADATOK

I. Helyettesítéses integrálás:

$$\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)dx = F\left(g(x)\right)+C \text{, ahol } F' = f.$$

Feladatok

1.a) $\int 2x\cos(x^2+1)dx = \sin(x^2+1)+C$, b) $\int x\sin x^2 dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$,

c) $\int (3x^2+2)\sin(x^3+2x-4)dx = -\cos(x^3+2x-4)+C$,

d) $\int x\cdot\sin\left(2+\pi x^2\right)dx = -\frac{1}{2\pi}\cos\left(2+\pi x^2\right)+C$,

e) $\int_0^1 e^{x+1}\cdot\cos e^x\,dx = e\cdot\sin e^x + C\ \Big|_0^1 = e\cdot\left(\sin e - \sin 1\right)$.

2. a) $\int e^{\cos x}\sin x dx = -e^{\cos x}+C$, b) $\int 2^{\sin x}\cdot 3\cos x\,dx = 3\cdot\frac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C$,

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{tgx}dx = e^{tgx}\ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = e-1$, d) $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$,

e) $x\in\mathbf{R}^+$, $\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}+C$. f) $\int_1^8 e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\Big|_1^8 = 2\cdot\left(e^{2\sqrt{2}}-e\right)$

3. a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\sqrt[4]{\frac{3}{4}}}\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt[4]{\frac{3}{4}}}2x\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \arcsin x^2\ \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt[4]{\frac{3}{4}}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$,

b) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int e^x\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \arcsin(e^x)+C$.

4. a) $\int\frac{2x}{1+x^4}dx = \int 2x\frac{1}{1+(x^2)^2}dx = \mathrm{arctg}x^2+C$, b) $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \mathrm{arctg}(e^x)+C$,

c) $\int_1^e\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx = \int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(\ln x)^2}dx = \mathrm{arctg}(\ln x)\ \Big|_1^e = \frac{\pi}{4}$,

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3\sin^2 x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cdot\cos x}{1+\left(\sqrt{3}\cdot\sin x\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\sin x\right)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = .$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\sin 0\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.$$

II. Az integrálszámítás alkalmazásai (a formulákat, a terület, a megtett út és a munka kivételével, nem kell kívülről megtanulni, de „használni” tudni kell!) :

1. Terület, vagy egységnyi sűrűségű lemez tömege:

Legyen $f:[a,b]\to \mathbf{R}^{+}$ folytonos függvény.

$\mathbf{T}=\int_a^b f(x)dx$, vagy $\mathbf{m}=\int_a^b f(x)dx$

2. Ívhossz

Legyen $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ folytonos, $]a,b[$-n folytonosan deriválható függvény.

$$\mathbf{L}=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

3. Forgástest térfogata

Legyen $f:[a,b]\to \mathbf{R}^{+}$ folytonos függvény.

$$\mathbf{V}=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)dx$$

4. Forgástest felszíne

Legyen $f:[a,b]\to \mathbf{R}^{+}$ folytonos, $]a,b[$-n folytonosan deriválható függvény.

$$\mathbf{A}=2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

5. Megtett út

Legyen a $v:[t_1,t_2]\to \mathbf{R}$ sebességfüggvény folytonos.

$$\mathbf{s}=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

6. Munka

Legyen az $f:[s_1,s_2]\to \mathbf{R}$ erő folytonos függvény (az erő és az elmozdulás iránya megegyezik.

$$\mathbf{W}=\int_{s_1}^{s_2} f(s)ds$$

7. Lemez súlypontja (homogén, egységnyi sűrűségű, vékony lemez)

Legyen $f:[a,b]\to \mathbf{R}^{+}$ folytonos függvény.

M_x, M_y, az (1), ill. a (2) tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomaték, m a lemez tömege.

$$x_s=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad y_s=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Feladatok:

1. Szemléltessük az alábbi függvényeket, és számítsuk ki a grafikon alatti területet!

a) $x \in [0,1],\ f(x) := \sqrt{x}$ $\quad \left[\frac{2}{3}\right]$, $\qquad$ b) $x \in [0,\pi],\ f(x) := \cos\frac{x}{2}$ $\quad [2]$,

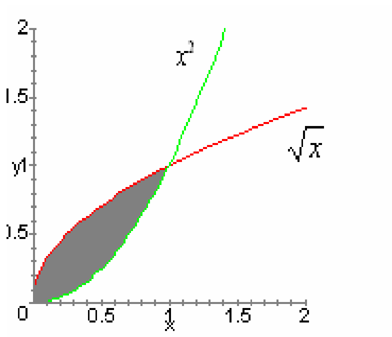
c) $x \in [3,4],\ f(x) := x^3 - 3$ $\quad [40{,}75]$, $\qquad$ d) $x \in [0,3],\ f(x) := \frac{1}{2x+4}$ $\quad \left[\ln\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$,

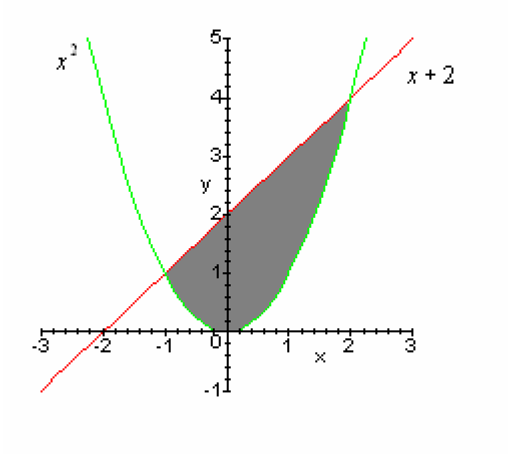
e) $x \in [0,1],\ f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$.

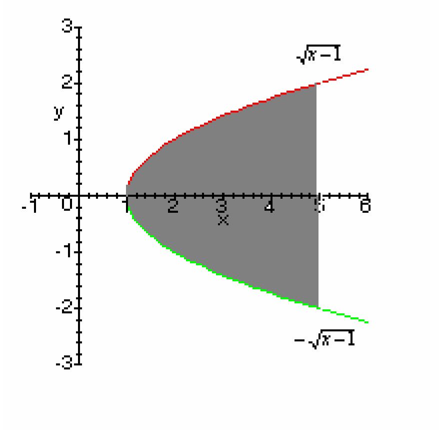
2. a) Számítsuk ki az $x \mapsto -x^2 + 9$ függvény grafikonja, a függvény 1 helyhez tartozó érintője és az (1) tengely által határolt síkidom területét!

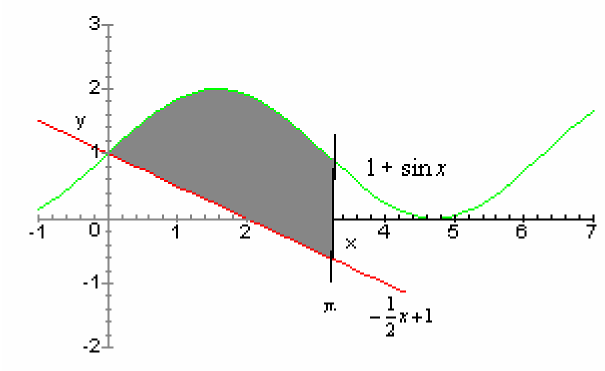
b) Számítsuk ki az $x \mapsto \sqrt{x}$ $\left(x \in \mathbf{R}_0^+\right)$ függvény grafikonja, a függvény 4 helyhez tartozó érintője és a (2) tengely által határolt síkidom területét!

3. Számítsuk ki a megjelölt síkidomok területét!









4 Számítsuk ki a függvények grafikonjának ívhosszát!

a) $x \in [2,4],\ \ f(x) := x^{\frac{3}{2}}$ $\qquad \left[\frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^3}\right) \approx 5{,}56\right]$,

b) $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ f(x) := \sqrt{1-x^2}$,

c) $x \in [0,1],\ \ f(x) := \sqrt{(2x+3)^3}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{27}\left(46^{\frac{3}{2}} - 28^{\frac{3}{2}} \right) \right],$

d) $x \in [\,2,4\,],\ \ f(x) := \ln\left(x^2 - 1\right)$ $\qquad \left[4 - 2 - 2\ln\sqrt{\dfrac{3}{5}} + 2\ln\sqrt{\dfrac{1}{3}} = 2 + \ln\sqrt{\dfrac{5}{9}} \approx 1{,}41 \right].$

5. Számítsuk ki a következő függvények grafikonjának az (1) tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát!

a) $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ f(x) := \cos x$

$$\left[\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \text{lin.helyettesítés} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} \right],$$

b) $x \in [0,5],\ \ f(x) := x^2$ $\qquad \left[\pi \cdot \dfrac{x^5}{5} \Big|_0^5 = 625\pi \right],$

c) m, r$\in \mathbf{R}^+$, $x \in [0, \mathrm{m}],\ \ f(x) := \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{m}} x$ (m magasságú, r sugarú kúp) $\left[\dfrac{r^2\pi}{m^2} \left[\dfrac{x^3}{3} \right]_0^m = \dfrac{r^2\pi \cdot m}{3} \right],$

d) $x \in [1, e],\ \ f(x) := \ln x$ $\quad \left[\text{kétszeri parciálisintegrálás után}: \pi\left[x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x\right]_1^e = \pi(e-2) \right],$

e) $x \in [0,5],\ \ f(x) := x^2$ $\qquad [\ 625\pi\ ].$

6. Számítsuk ki a következő függvények grafikonjának az (1) tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek felszínét!

a) $x \in [0,4],\ \ f(x) := 2\sqrt{x}$ (forgásparaboloid) $\left[\dfrac{8\pi}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \dfrac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \right],$

b) $x \in [0,5],\ \ f(x) := 3x^3$ $\qquad \left[\dfrac{\pi}{54} \left[\left(1 + 81x^4\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \dfrac{2}{3} \right]_0^5 \approx \dfrac{\pi}{81} \left[\left(9x^2\right)^3 \right]_0^5 = \dfrac{225^3 \pi}{81} \right].$

7. Számítsuk ki a $t_2 – t_1$ idő alatt megtett utat, ha adott a sebességfüggvény:

a) $v:\ t \in [\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2],\ \ t \mapsto v_0 \quad (v_0 \in \mathbf{R})$ egyenes vonalú, egyenletes mozgás.

b) $v:\ t \in [\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2],\ \ t \mapsto at \quad (a \in \mathbf{R})$ egyenletesen változó mozgás.

8. Munka

a) Mekkora munkával lehet agy rugó eredeti hosszát s-sel megnyújtani?
Legyen D a rugóállandó, x a rugó megnyúlása. A rugóra ható erő: $x \in [0, \mathrm{s}],\ \ f(x) := \mathrm{D} \cdot x$.

b) Számítsuk ki a váltóáram munkáját: $t \in [0, 2\pi],\ \ f(t) := \mathrm{U}_0 \cdot \sin \omega t$.

9.Súlypont

a) Határozzuk meg az

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0, \pi],\ 0 \le y \le \sin x\}$$

halmazzal leírható vékony, egységnyi sűrűségű, homogén síktartomány súlypontját!

Megoldás: $(x_s, y_s) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

b) Határozzuk meg az

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0,1],\ 0 \le y \le x^3\}$$

halmazzal leírható vékony, egységnyi sűrűségű, homogén síktartomány súlypontját!

Megoldás: $(x_s, y_s) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{7}\right)$.

c) Határozzuk meg az

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [1,4],\ 0 \le y \le \frac{1}{x}\}$$

halmazzal leírható vékony, egységnyi sűrűségű, homogén síktartomány súlypontját!

Megoldás: $(x_s, y_s) = \left(\frac{3}{\ln 4}, \frac{3}{8 \cdot \ln 4}\right)$.

d) Határozzuk meg az

$$\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \le y \le \cos x\}$$

halmazzal leírható vékony, egységnyi sűrűségű, homogén síktartomány súlypontját!

Megoldás: $(x_s, y_s) = \left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8}\right)$.